

# فصل ۱

## رده‌ی توابع تک ارز

نظریه توابع مختلط با قدمتی بیش از دو سده، از شاخه‌های مهم آنالیز بشمار رفته و با بحث روی نقاط صفحه و کنش آنها، الگوی بسیاری از مباحث و قضایای آنالیز بشمار می‌رود. از نظر تاریخی پیرامون این نظریه، بحث روی توابع تک ارز به ابتدای قرن بیستم بر می‌گردد، و آن هنگامی بود که طلایه داران آنالیز، مبانی و تعاریف تابع تک ارز یا تابع تک مقدار را بیان نموده و در این بین حدس بیبرباخ با عمری هفتاد ساله سرمایه بسیاری از پیشرفت‌ها در این مبحث بوده و پس از آن نظریه توابع همساز که خود منشعب از نظریه توابع تحلیلی است، راه خود را در این میان گشودند.

نظریه توابع مختلط طی شکل‌گیری اولیه با دیدی هندسی که مخصوصاً مورد توجه دانشمندانی بود که تمایل به پیوند ریاضی با سایر علوم داشتند، مورد بحث و تفحص قرار داشت. بیان ویژگی‌های صفحه مختلط با بکارگیری ایده‌های هندسی توسط هندسه-دیفرانسیل دانه‌های نیمه اول قرن بیستم، باعث انگیزش بیشتر دانشمندان غیر ریاضی مخصوصاً فیزیکدانها به این سمت بوده و چنین نگرشی از صفحه‌ی مختلط با آهنگی کندتر به امروز منتقل شده است.

مبحث توابع تک ارز هم اکنون نیز دستمایه‌ی بسیاری از نوشتجات طرفداران این نظریه است و با وجود تحقق حدس بیبرباخ، همچنان در زیر رده‌های مختلف مورد بحث بوده و گهگاه تعامل بین این زیررده‌ها را نیز مورد تحقیق و بررسی قرار می‌دهند. واضح است که بسیاری از خواص زیر رده‌های توابع تک ارز روی قرص واحد را می‌توان به توابع چندارزی و نیز دامنه‌های همبند چندگانه گسترش داد و از این لحاظ، یافته‌های مورد بررسی در توابع

تک ارز ارزشمندتر خواهند شد.

ما در ابتدا تعاریف شناخته شده و مورد نیازمان را در رده ی توابع تک ارز بازگو کرده و خواص لازم که در ادامه کار سرلوحه کارمان خواهد بود را از مقابل نظر خواهیم گذراند.

## ۱.۱ رده ی $S$

در این متن  $\mathbb{C}$  عبارتست از صفحه مختلط،  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  قرص یکه باز<sup>۱</sup> و مرز آن که با  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  نمایش داده می شود. هر مجموعه باز همبند را که دامنه نامیده می شود با  $D$  یا  $\Omega$  مشخص کرده و  $H(\Omega)$  نمایش مجموعه تمام توابع تحلیلی<sup>۲</sup> تعریف شده بر دامنه  $\Omega$  است. تابع

$$\begin{cases} f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \end{cases}$$

روی  $D$  تحلیلی است اگر  $f$  پیوسته بوده و  $u$  و  $v$  در معادلات کوشی ریمان<sup>۳</sup> صدق کنند یعنی  $u_x = v_y$  و  $u_y = -v_x$ . این مطلب معادل با آن است که  $f \in C^1(D)$  اگر توابع حقیقی  $u = \operatorname{Re} f$  و  $v = \operatorname{Im} f$  از متغیرهای حقیقی  $x$  و  $y$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی  $D$  باشند. یک نگاشت تحلیلی را همدیس<sup>۴</sup> گوئیم اگر مشتق آن هرگز صفر نشود. نگاشتهای همدیس وقتی که نقطه ی تقاطع دو منحنی را از دامنه انتقال می دهند، زاویه بین دو منحنی را بهمان اندازه به برد انتقال داده و جهت مثلثاتی آن را نیز به همان صورت حفظ می کنند، از اینرو حافظ زاویه و جهتند. قضیه زیر وجود چنین نگاشتهای همدیسی را بین دو دامنه تضمین می کند.

**قضیه ۱.۱.۱.** (قضیه نگاشت ریمان<sup>۵</sup> [۷۷]) گیرم  $G$  زیرمجموعه سره از صفحه مختلط باشد که همبند ساده<sup>۶</sup> است و  $z_0 \in G$ . سپس نگاشت تک ارز<sup>۷</sup> یکتای  $\phi : G \rightarrow \mathbb{D}$  وجود دارد که  $\phi(z_0) = 0$  و  $\phi'(z_0) > 0$ .

چنین نگاشتی که در قضیه صادق است نگاشت ریمان<sup>۸</sup> نامیده می شود. باید ذکر کنیم که منظور از توابع تک ارز در این نوشتار، توابعی تحلیلی و یک به یک بوده مگر در غیر این موارد تصریح شود. پس قضیه نگاشت ریمان وجود نگاشتی تک ارز بین هر دو دامنه همبند ساده

<sup>۱</sup>Open Unit Disk

<sup>۲</sup>Analytic (Holomorphic) functions

<sup>۳</sup>Cauchy-Riemann equations

<sup>۴</sup>Conformal

<sup>۵</sup>Riemann Mapping Theorem

<sup>۶</sup>Simply-Connected

<sup>۷</sup>Univalent, Schlicht, One-to-one

<sup>۸</sup>Riemann map

را تضمین می‌کند. چنین نگاشتهای تک ارزی دارای مشتق ناصفر بوده و در نتیجه همدیس اند. علاوه بر این می‌توان بحث توابع تک ارز را از هر دامنه به  $\mathbb{D}$  منتقل کرد. گیریم  $G \neq \mathbb{C}$  دامنه‌ای همبند ساده باشد. پس می‌توان تابع  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  را با تابع  $f := F \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  که  $\phi : G \rightarrow \mathbb{D}$  نگاشت ریمان است، جایگزین نمود. بنابراین در مطالعه‌ی توابع تحلیلی تک ارز، توجه خود را به نگاشتهای روی  $\mathbb{D}$  معطوف می‌کنیم.  
گیریم  $A$  رده<sup>۹</sup>ی توابعی به شکل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

باشد که روی  $\mathbb{D}$  تحلیلی اند. بعلاوه  $S$  رده‌ی توابع  $f \in A$  است که روی  $\mathbb{D}$  تک ارز ند. رده‌ی  $S$  خانواده‌ای فشرده از توابع است که تحت مزدوج سازی<sup>۱۰</sup>، چرخش<sup>۱۱</sup>، انبساط<sup>۱۲</sup>، خودریختی قرص<sup>۱۳</sup> و انتقال برد<sup>۱۴</sup> [۳۱] حفظ می‌شود. یک مثال از چنین توابعی در رده  $S$  تابع کوبه<sup>۱۷</sup>

$$k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots \quad (2.1)$$

است. این تابع قرص  $\mathbb{D}$  را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی از  $-\frac{1}{4}$  تا  $-\infty$  می‌نگارد (شکل (۱.۱)). این تابع نقش نگاشت اکستریمال<sup>۱۸</sup> را برای رده‌ی  $S$  بازی می‌کند. قضیه یک-چهارم کوبه<sup>۱۹</sup> چنین بیان می‌کند [۳۱]:

**قضیه ۲.۱.۱.** تصویر  $\mathbb{D}$  تحت هر تابع تک ارز  $f \in S$  شامل قرصی به شعاع  $\frac{1}{4}$  است. در ۱۹۱۶ **بیرباخ**<sup>۲۰</sup> قضیه‌ای ثابت کرد که نشان می‌داد ضریب دوم  $a_2$  در بسط هر تابع  $f \in S$  می‌بایست حداکثر ۲ باشد یعنی  $|a_2| \leq 2$  و حدس زد که برای هر تابع تک ارز  $f \in S$  می

<sup>۹</sup>Class

<sup>۱۰</sup>Conjugation

<sup>۱۱</sup>Rotation

<sup>۱۲</sup>Dilation

<sup>۱۳</sup>Disc Automorphism

<sup>۱۴</sup> برای تابع تحلیلی موضعا تک ارز  $f \in A$ ، خودریختی قرص تابع  $\Lambda_f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  است که

$$\Lambda_f(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}z_0}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

برای  $z_0 \in \mathbb{D}$ . خانواده  $\mathcal{F}$  پایای خطی<sup>۱۵</sup> اگر برای هر  $f \in \mathcal{F}$  داشته باشیم  $\Lambda_f(z) \in \mathcal{F}$

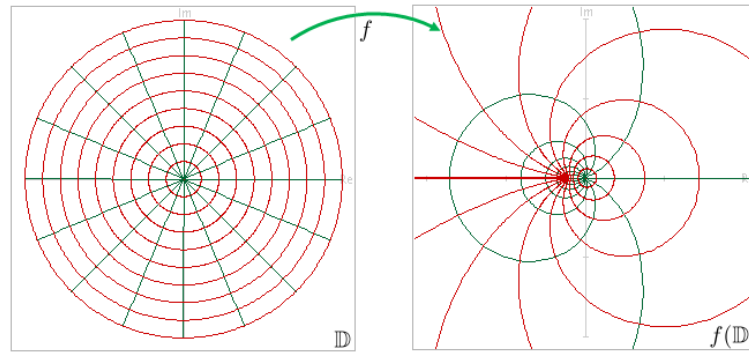
<sup>۱۶</sup>Range Transformation

<sup>۱۷</sup>Paul Koebe (1882-1945)

<sup>۱۸</sup>Extremal

<sup>۱۹</sup>Koebe

<sup>۲۰</sup>Bieberbach



شکل ۱.۱: تصویر  $\mathbb{D}$  تحت تابع کوبه.

بایست  $|a_n| \leq n$  برای هر  $n \geq 2$  برقرار باشد. طی قرن بیستم این حدس مبنای مطالعات زیادی در رده ی توابع تک ارز شد و خواص بسیاری از این رده را آشکار نمود. همچنین بحث بر سر کران ضرایب و اثبات حدس **بیبرباخ** همچنان ادامه یافت و کران ضرایب نخست، چنین بدست آمد:

$$|a_2| \leq 2 \quad 1916 \quad \text{بیبرباخ [۱۲].}$$

$$|a_3| \leq 3 \quad 1923 \quad \text{لاونر [۵۶].}$$

$$|a_4| \leq 4 \quad 1955 \quad \text{قاراآبادیان [۲۲] و شیفر [۳۸].}$$

$$|a_5| \leq 5 \quad 1972 \quad \text{پترسون [۲۴] و شیفر [۷۴].}$$

$$|a_6| \leq 6 \quad 1968 \quad \text{پترسون [۷۳] و مستقلا اوزاوا [۷۲] در ۱۹۷۲.}$$

بهترین نتیجه شناخته شده تا آن موقع از آن **هوروویتس** [۲۸] بود [۴۵] که ثابت کرد  $|a_n| < n$

$1/0657n$ . بالاخره در ۱۹۸۵ **حدس بیبرباخ** توسط **دوبرانژ** [۲۹] به اثبات رسید:

**قضیه ۳.۱.۱. (دوبرانژ [۲۶])** برای هر  $f \in \mathcal{S}$ ، ضرایب در رابطه  $|a_n| \leq n$  برای هر  $n$  صدق می کنند.

برای نیل به این مقصود **دوبرانژ**، **حدس میلین** [۳۰] روی ضرایب لگاریتمی را ثابت کرد که

**حدس روبرتسون** [۳۱] روی توابع تک ارز فرد را نتیجه می دهد و آن نیز نتیجه اش **حدس روگوسینسکی** [۳۲]

روی توابع مطیع [۳۳] است که آن هم **حدس بیبرباخ** را نتیجه می دهد (ر.ک. [۳۱]، ص ۱۹۷).

**حدس میلین** بیانگر آنست که ضرایب لگاریتمی  $\gamma_n$  از یک تابع تک ارز به شکل (۱.۱) که

بصورت

$$\log \left( \frac{f(z)}{z} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \quad (3.1)$$

<sup>۲۸</sup>Horowitz

<sup>۲۹</sup>Louis de Branges

<sup>۳۰</sup>Milin conjecture (1971)

<sup>۳۱</sup>Robertson conjecture (1936)

<sup>۳۲</sup>Rogosinski conjecture (1943)

<sup>۳۳</sup>Subordinate Functions

تعریف می شود در نابرابری

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left( k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

صدق می کنند. واضح است که ضرایب لگاریتمی تابع **کوبه**  $\gamma_n = \frac{1}{n}$  بوده و در **حدس میلین** صادقند. **حدس روبرتسون** نیز می گوید که ضرایب هر تابع تک ارز فرد نظیر  $h(z) = z + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n$  در نابرابری

$$1 + |c_3|^2 + \dots + |c_{2n-1}|^2 \leq n$$

صدق می کنند [۵]. **حدس روگوسینسکی** در لم ۱.۲.۱ خواهد آمد.

## ۲.۱ تابعیت

گوئیم تابع  $f$  **مطیع**<sup>۳۴</sup> تابع  $g$  است و می نویسیم  $f \prec g$  یا  $f(z) \prec g(z)$  اگر تابع تحلیلی  $\omega$  روی  $\mathbb{D}$  چنان موجود باشد که  $\omega(0) = 0$ ،  $|\omega(z)| < 1$  و  $f(z) = g(\omega(z))$  برای  $z \in \mathbb{D}$ . هنگامی که  $g$  تک ارز باشد،  $f$  **مطیع** تابع  $g$  است اگر  $f(0) = g(0)$  و  $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ .

لم ۱.۲.۱. (**حدس روگوسینسکی** [۳۱]) اگر  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$  روی  $\mathbb{D}$  تحلیلی بوده و بازای

$$f \in \mathcal{S}, \quad g \prec f \quad \text{آنگاه} \quad |b_n| \leq n \quad \text{که} \quad n = 1, 2, \dots$$

معمولا **حدس روگوسینسکی** را بعنوان تعمیم **حدس بیبرباخ** می شناسند. می توان ثابت کرد که اگر  $f, g \in \mathcal{S}$  و  $g \prec f$  سپس  $f = g$ .

## ۳.۱ توابع ستاره گون

تابع  $f(z)$  را **ستاره گون**<sup>۳۵</sup> نامیم اگر بردش نسبت به مبداء ستاره گون باشد. از نظر هندسی، هر نقطه از برد  $f(z)$  را می توان با پاره خطی به مبداء وصل نمود چنانکه تمام پاره خط در برد واقع شود [۷۷]. بعبارتی  $\arg\{f(e^{i\theta})\}$  تابعی غیرنزولی از  $\theta$  است یعنی

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg\{f(e^{i\theta})\} \geq 0$$

زیررده ی تمام توابع ستاره گون در  $\mathcal{S}$  را با  $\mathcal{S}^*$  نشان می دهیم. بعلاوه  $f(z) \in \mathcal{S}^*$  اگر و فقط اگر  $\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$  و این نیز اگر و فقط اگر  $z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$  همچنین تابعی با خاصیت

<sup>۳۴</sup> Subordinate

<sup>۳۵</sup> Starlike

$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$  روی  $\mathbb{D}$  تک ارز خواهد شد. این موضوع نشان می دهد که

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}$$

یا  $\log f(z) \prec \log \frac{z}{(1-z)^2}$  و در نتیجه نگاشت  $k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  نقش اکستریمال را برای رده ی  $S^*$  بازی می کند، و بنابراین  $|a_n| \leq n$  برای هر  $n \geq 2$  برقرار است.

بوضوح حاصلضرب دو تابع ستاره گون تابعی است ستاره گون زیرا اگر  $G(z) = f(z)g(z)$  پس  $\log G(z) = \log f(z) + \log g(z)$  که با مشتقگیری  $z \frac{G'(z)}{G(z)} = z \frac{f'(z)}{f(z)} + z \frac{g'(z)}{g(z)}$  برای  $z \in \mathbb{D}$  و نتیجه حاصل می شود.

ستاره گونی خاصیتی ارثی برای نگاشتهای همدیس است یعنی اگر  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و تک ارز با  $f(0) = 0$  بوده و  $\mathbb{D}$  را به ناحیه ای ستاره گون (نسبت به مبداء) بنگارد، آنگاه تصویر هر زیرقرص  $|z| < r < 1$  نیز نسبت به مبداء ستاره گون خواهد بود.

فرض کنید  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  روی  $\mathbb{D}$  ستاره گون باشد، سپس یک اندازه احتمالاتی یکتای  $\mu$  هست که روی زیرمجموعه های بورل دایره یکه  $\mathbb{T}$  تعریف می شود چنانکه

$$F(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \int \frac{1 + \bar{\gamma}z}{1 - \bar{\gamma}z} d\mu(\gamma) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این نتیجه می دهد که

$$F(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int \bar{\gamma}^n d\mu(\gamma)$$

اکنون با تعریف دنباله  $c_n = 2 \int \bar{\gamma}^n d\mu(\gamma)$  می یابیم

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

و

$$f(z) = z \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_n z^n \right)$$

دنباله های  $a_n$  و  $c_n$  با رابطه ی  $(n+1)a_n = \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k}$  با هم مرتبطند که  $n = 1, 2, 3, \dots$  و  $a_1 = 1$ .

لم ۱.۳.۱. (بازیلویچ [۱۱]) اگر  $f(z)$  ستاره گون بوده  $\gamma > 0$  آنگاه

$$\left( \frac{f(z)}{z} \right)^\gamma \prec \frac{|f'(0)|^\gamma}{(1-z)^{2\gamma}}$$

روبرتسون<sup>۳۶</sup> (۱۹۳۶) زیررده ای از  $S$  را معرفی نمود:

تعریف ۱.۳.۱. (روبرتسون [۸۵]) تابع تحلیلی  $f(z)$  ستاره‌گون از مرتبه  $\alpha$  نامیده می‌شود اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (۵.۱)$$

برای  $z \in \mathbb{D}$  که  $0 \leq \alpha < 1$  و مجموعه چنین توابعی را با  $S^*(\alpha)$  می‌نمایانند. در این تعریف مقدار پارامتر  $\alpha$  محدود به  $0 \leq \alpha < 1$  می‌شود زیرا ۵.۱ بازای  $\alpha < 0$  لزوماً در  $\mathbb{D}$  تک ارز نخواهد بود. مارکز<sup>۳۷</sup>، روبرتسون و اسکات<sup>۳۸</sup> (۱۹۶۱) حاصلضرب توابع ستاره‌گون از مرتبه عددی مثبت را به شکل زیر مشخصه سازی کردند:

لم ۲.۳.۱. [۵۹] گیریم  $f_n(z)$  برای  $n = 1, 2, \dots, N$  توابع ستاره‌گونی حداقل از مرتبه  $1 - d_n \geq 0$  باشند که  $d_n \geq 0$  و فرض کنید  $s_N = 1 - \sum_{n=1}^N d_n \geq 0$ . آنگاه حاصلضرب

$$F_N(z) = z \prod_{n=1}^N \frac{f_n(z)}{z} \quad (۶.۱)$$

تابعی ستاره‌گون حداقل از مرتبه  $s_N$  است.

لم ۳.۳.۱. [۵۹] فرض کنید  $f(z) \in \mathcal{S}$  و  $F(z) = z \left( \frac{f(z)}{z} \right)^\alpha$  به شرط  $F'(0) = 1$  باشد آنگاه بازای  $F(z)$ ،  $\alpha \geq 1$  در  $\mathbb{D}$  تک ارز و ستاره‌گون است اگر و فقط اگر  $f(z)$  ستاره‌گون حداقل از مرتبه  $1 - \frac{1}{\alpha}$  باشد.

این لم بازای  $0 \leq \alpha < 1$  ما را به نتیجه مشابه  $f(z) = z \left( \frac{F(z)}{z} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$  می‌رساند. لم زیر شرطی کافی را برای ستاره‌گونی برحسب ضرایب ارائه می‌کند:

لم ۴.۳.۱. [۹۷، ۵۹] تابع  $f \in \mathcal{A}$  ستاره‌گون از مرتبه حداقل  $\alpha$  است ( $0 \leq \alpha < 1$ )، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \quad (۷.۱)$$

همچنین در صورتی که برای هر  $n$   $a_n \leq 0$  باشد سپس (۷.۱) شرط لازم برای ستاره‌گون بودن  $f(z)$  از مرتبه حداقل  $\alpha$  هم خواهد بود.

مثال ۱.۳.۱. [۵۹] تابع  $f_n(z) = z - \frac{z^3}{4n^2}$  بنابر لم ۴.۳.۱ ستاره‌گون از مرتبه

$$a_n = 1 - d_n = 1 - \frac{2}{4n^2 - 1}$$

است. چون  $s_N = 0$  سپس لم ۲.۳.۱ نشان می‌دهد که

$$\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{4n^2} \right) \quad (۸.۱)$$

در  $\mathbb{D}$  تک ارز و ستاره‌گون است.

مثال ۲.۳.۱. [۵۹] تابع  $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$  که  $\Gamma(z)$  تابع گامای اوپلر<sup>۳۹</sup> است

<sup>۳۷</sup>Markes

<sup>۳۸</sup>Scott

<sup>۳۹</sup>Euler gamma function

بازای  $|z| < r_0$  تک ارز و ستاره گون است که  $r_0$  اندازه بزرگترین صفر منفی  $\Gamma'(z) = -0.500 \dots$  است و این نتیجه دقیق است.

باید خاطر نشان کنیم که شعاع ستاره لگونی<sup>۴۰</sup> از  $\tanh \frac{\pi}{4} \approx 0.655 \dots$  کمتر است. زیر رده ی دیگری از رده توابع ستاره گون توسط استانکویچ<sup>۴۱</sup> (۱۹۶۶) و برنان<sup>۴۲</sup> (۱۹۶۹) مستقلا معرفی شد:

**تعریف ۲.۳.۱.** [۱۵، ۱۱۰] تابع تحلیلی  $f(z)$  قویا ستاره لگون<sup>۴۳</sup> از مرتبه  $\beta$  خوانیم ( $0 < \beta \leq 1$ ) اگر در نابرابری

$$\left| \arg \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} \right| < \beta \frac{\pi}{4}$$

برای  $z \in \mathbb{D}$  صدق کند و رده چنین توابعی با  $S^*[\beta]$  نشان داده می شود.

## ۴.۱ تحدب

تابع تحلیلی  $f(z)$  را محدب<sup>۴۴</sup> گوئیم اگر برد آن مجموعه ای محدب باشد. از نظر هندسی می توان برد  $f(\mathbb{D})$  را محدب نامید بدین معنی که  $\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(e^{i\theta}) \right\}$  تابعی غیرنزولی از  $\theta$  باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(e^{i\theta}) \right\} \geq 0$$

رده تمام توابع محدب در  $S$  را با  $\mathcal{K}$  نشان می دهیم [۷۷]. این رده بوده و همچنین  $f(z) \in \mathcal{K}$  اگر و فقط اگر  $\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$  و این اگر و فقط اگر  $1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} < \frac{1+z}{1-z}$  واضح است که هر تابع محدب، ستاره گون است. تابع اکستریمال برای رده ی  $\mathcal{K}$  عبارتست از  $\ell(z) = \frac{z}{1-z}$  (شکل ۲.۱).

تحدب خاصیتی ارثی در نگاشتهای همدیس دارد. پس اگر  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و تک ارز بوده و قرص را به دامنه ای محدب بنگارد، سپس تصویر هر زیرقرص  $|z| = r < 1$  نیز محدب خواهد بود. بنابراین می توانیم بگوئیم که برای هر  $r < 1$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right\} \geq 0$$

که  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . شعاع تحدب<sup>۴۵</sup> کلاس  $S$  برابر  $0.267 \dots \approx 2 - \sqrt{3}$  است.

قضیه ای از الکساندر<sup>۴۶</sup> (۱۹۱۵) رابطه ی میان رده های  $S^*$  و  $\mathcal{K}$  را بخوبی نشان می دهد:

<sup>۴۰</sup> The radius of starlikeness

<sup>۴۱</sup> Stankiewicz

<sup>۴۲</sup> Brannan

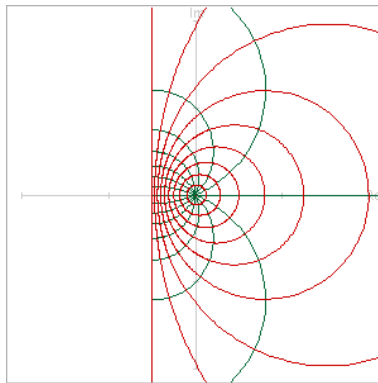
<sup>۴۳</sup> Strongly Starlike

<sup>۴۴</sup> Convex

<sup>۴۵</sup> Radius of Convexity

<sup>۴۶</sup> Alexander





شکل ۲.۱: تصویر  $\mathbb{D}$  تحت نگاشت محذب  $f = \frac{z}{1-z}$ .

**قضیه ۱.۴.۱ (قضیه الکساندر)** گیریم  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی با نرمالسازی  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 1$  باشد. آنگاه  $f \in \mathcal{K}$  اگر و فقط اگر  $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ .

یکی از نتایج مفید این قضیه، روابط زیر بین ستاره‌گونی و تحدب است. چنانچه اگر  $f \in \mathcal{S}^*$  باشد سپس  $g(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z} dz$  محذب است. علاوه بر این

**قضیه ۲.۴.۱ (روبرتسون)** اگر  $f \in \mathcal{S}^*$  سپس تابع  $S(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt$  در  $\mathcal{S}^*$  است.

**لم ۱.۴.۱ (سیلورمن<sup>۴۷</sup> [۹۷])** فرض کنید  $f(z)$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و به شکل (۱.۱) باشد. اگر  $f \in \mathcal{K}$  سپس  $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \leq 1$ .

زیررده  $\mathcal{K}(\alpha)$  از  $\mathcal{K}$  شامل تمام توابع محذب از مرتبه  $\alpha$  توسط **روبرتسون** [۸۵] معرفی شد. برای  $0 \leq \alpha < 1$  تابع  $f(z)$  در  $A$  را **محذب از مرتبه  $\alpha$** <sup>۴۸</sup> نامیم اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (9.1)$$

بازای  $z \in \mathbb{D}$ . بدیهی است که برای  $0 \leq \alpha < \beta < 1$

$$\mathcal{K}(\beta) \subset \mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \quad (10.1)$$

تابع اکستریمال رده  $\mathcal{K}(\alpha)$  عبارتست از

$$k_\alpha(z) = \begin{cases} \frac{(1-z)^{2\alpha-1} - 1}{1-2\alpha} & ; \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ -\log(1-z) & ; \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (11.1)$$

که  $\mathbb{D}$  را به طور تک ارز به نیم صفحه  $\operatorname{Re}\{w\} > \alpha$  می نگارد (**سوگاوا**<sup>۴۹</sup> [۱۱۲]). جالب است بدانیم که  $1 + z \frac{k_\alpha''(z)}{k_\alpha'(z)} = \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1-z}$  بوده و دارای ویژگی های  $k_\alpha(0) = 0$  و  $k_\alpha'(0) = 1$  است.

<sup>۴۷</sup>Silverman

<sup>۴۸</sup>Convex of Order  $\alpha$

<sup>۴۹</sup>Sugawa

بوضوح  $k_0(z) = \frac{z}{1-z}$  بوده و این نگاشت  $\mathbb{D}$  را به طور تک ارز به نیم صفحه ی  $\text{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$  نگاشته و  $\frac{k_0(z)}{z} = \frac{1}{1-z}$  نیز  $\mathbb{D}$  را به طور تک ارز به نیم صفحه  $\text{Re}\{w\} > \frac{1}{2}$  می نگارد. طبق قضیه **الکساندر (۱.۴.۱)** می بینیم که:

$$f(z) \in \mathcal{K}(\alpha) \iff zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha) \quad (12.1)$$

بعلاوه

لم ۲.۴.۱. (سیم<sup>۵۰</sup> و کوان<sup>۵۱</sup> [۹۸]) اگر  $f(z) \in \mathcal{K}(\alpha)$  سپس  $\text{Re} \sqrt{f'(z)} > \frac{1}{2-\alpha}$  و بیشتر اینکه

لم ۳.۴.۱. (سیم<sup>۵۱</sup> و کوان [۹۸]) اگر  $\text{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} < \beta$  باشد که  $1 < \beta < 2$  آنگاه  $\text{Re} \sqrt{f'(z)} < \frac{1}{2-\beta}$

اما آیا ارتباطی میان رده های  $\mathcal{K}(\alpha)$  و  $\mathcal{S}^*(\alpha)$  وجود دارد؟. نخست اینکه تابع محدب نرمال شده در قرص واحد ستاره گون حداقل از مرتبه  $\frac{1}{2}$  است [۶۰] و در ادامه نتیجه ای از **مکی گرگور<sup>۵۲</sup>** بیان می کند که

لم ۴.۴.۱. [۱۱۶] گیریم  $0 \leq \alpha < 1$  و  $f \in \mathcal{K}(\alpha)$ ، سپس  $f(z) \in \mathcal{S}^*(\delta(\alpha))$  است که

$$\delta(\alpha) = \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{2-2\alpha-2} & ; \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2 \log 2} & ; \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (13.1)$$

لم ۵.۴.۱. [۹۷] تابع  $f \in \mathcal{A}$  را محدب از مرتبه  $\alpha$  با شرط  $0 \leq \alpha < 1$  گوئیم اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \quad (14.1)$$

لم ۶.۴.۱. (مارکس<sup>۵۳</sup> و استروهگر<sup>۵۴</sup> ۱۹۳۳) برای تابع محدب نرمال شده  $f$  روی قرص واحد  $\mathbb{D}$  داریم  $\frac{f(z)}{z} < \frac{1}{1-z}$  که  $z \in \mathbb{D}$ .

<sup>۵۰</sup> Sim

<sup>۵۱</sup> Kwon

<sup>۵۲</sup> MacGregor

<sup>۵۳</sup> Marx

<sup>۵۴</sup> Strohacker

لم ۷.۴.۱. (بریکمن<sup>۵۵</sup>، هالنبک<sup>۵۶</sup>، مک گرگور و ویلکن<sup>۵۷</sup> ۱۹۷۳) فرض کنید  $1 > \alpha > \frac{1}{4}$  آنگاه برای  $f \in \mathcal{K}(\alpha)$  داریم  $\frac{f(z)}{z} \prec \frac{k_\alpha(z)}{z}$  که  $z \in \mathbb{D}$  همچنین  $\frac{k_\alpha(r)}{r} \leq \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} \leq \frac{k_\alpha(-r)}{-r}$  بازای  $|z| = r < 1$ .

لم ۸.۴.۱. (سوگاوا و وانگ<sup>۵۸</sup> ۲۰۱۵ [۱۱۲]) فرض بگیرید که  $0 < \alpha < 1$  سپس برای  $f \in \mathcal{K}(\alpha)$  داریم  $\frac{f(z)}{z} \prec \frac{k_\alpha(z)}{z}$  که  $z \in \mathbb{D}$ .

لم ۹.۴.۱. (استیر<sup>۵۹</sup> و رایت<sup>۶۰</sup> ۱۹۷۳) فرض کنید  $f, g \in \mathcal{K}$  بوده و  $|\operatorname{Im} \frac{f(z)}{z}| \leq \frac{\pi}{4}$  و نیز  $|\operatorname{Im} \frac{g(z)}{z}| \leq \frac{\pi}{4}$  روی  $\mathbb{D}$  برقرار باشد آنگاه  $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$ .

لم ۱۰.۴.۱. (هالنبک و روشه ویه<sup>۶۱</sup> ۱۹۷۵ [۴۳]) برای  $f, g \in \mathcal{K}$  با شرط  $f''(0) = g''(0) = 0$  داریم  $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$ .

در واقع آنها ثابت کردند که برای  $f \in \mathcal{K}$  با شرط  $f''(0) = 0$  که در  $|\operatorname{Im} \frac{f(z)}{z}| \leq \frac{\pi}{4}$  صدق می کند داریم

$$\frac{f(z)}{z} \prec H_1(z) := \frac{1}{2\sqrt{z}} \log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}. \quad (15.1)$$

لم ۱۱.۴.۱. (سوگاوا و وانگ<sup>۶۲</sup> ۲۰۱۵ [۱۱۲]) برای  $f, g \in \mathcal{K}(\frac{3}{5})$  داریم  $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$ .

لم ۱۲.۴.۱. [۵۹] اگر  $f, g \in \mathcal{K}$  آنگاه  $\frac{fg}{z} \in \mathcal{S}^*$  این حاصلضرب ستاره گون از هیچ مرتبه مثبتی نیست زیرا که  $f(z) = g(z) = \frac{z}{1+z}$ .

تعریف ۱.۴.۱. تابع تحلیلی  $f(z)$  را قویا محدب از مرتبه  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) گوئیم اگر در نابرابری زیر صدق کند

$$\left| \arg \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \right| < \beta \frac{\pi}{2}$$

که  $z \in \mathbb{D}$  و مجموعه ی چنین توابعی را با  $\mathcal{K}^*[\beta]$  نشان می دهیم.  
داریم

$$f(z) \in \mathcal{K}[\beta] \iff zf'(z) \in \mathcal{S}^*[\beta] \quad (16.1)$$

<sup>۵۵</sup>Brickman

<sup>۵۶</sup>Hallenbeck

<sup>۵۷</sup>Wilken

<sup>۵۸</sup>Wang

<sup>۵۹</sup>Styer

<sup>۶۰</sup>Wright

<sup>۶۱</sup>Ruscheweyh

<sup>۶۲</sup>Strongly Convex of Order  $\beta$

نانوکاوا<sup>۶۳</sup> (۱۹۹۳) ثابت کرد که برای  $0 < \beta < 1$ ، اگر  $f(z) \in \mathcal{K}[\delta(\beta)]$  آنگاه  $f(z) \in \mathcal{S}^*[\beta]$  که در آن

$$\delta(\beta) = \beta + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\beta n(\beta) \sin \frac{(1-\beta)\pi}{4}}{m(\beta) + \beta n(\beta) \cos \frac{(1-\beta)\pi}{4}}$$

جائی که  $n(\beta) = (1-\beta)^{\frac{\beta-1}{4}}$  و  $m(\beta) = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{4}}$

لم ۱۳.۴.۱. (اومی زاوا<sup>۶۴</sup> [۱۱۵]) فرض کنید  $f \in \mathcal{A}$  و  $f'(z) \neq 0$  روی  $|z|=1$  باشد. اگر رابطه ی  $\int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \right| d\theta < 4\pi$  بازای  $|z|=1$  برقرار باشد آنگاه  $f(z)$  در یک جهت محدب بوده و در نتیجه  $f(z)$  در  $|z| \leq 1$  تک ارز خواهد شد. بدین طریق تحدب در یک جهت نیز مطرح گردید و تعریف زیر مفید واقع شد:

تعریف ۲.۴.۱. دامنه  $D$  را **محدب در جهت  $\alpha$** <sup>۶۵</sup> نامیم ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) اگر اشتراک آن با هر خطی که از مبدا و نقطه ی  $e^{i\alpha}$  می گذرد تهی یا یک بازه باشد. بدین تعریف، تابع  $f$  را در  $D$  محدب در جهت  $\alpha$  گوئیم اگر  $f(\mathbb{D})$  محدب در جهت  $\alpha$  باشد. در مفهومی عمومی تر گوئیم  $f$  **محدب در یک جهت** است اگر  $\alpha$  ی باشد چنانکه  $f$  محدب در جهت  $\alpha$  شود. گوئیم دامنه  $D \subset \mathbb{C}$  **محدب در جهت افقی**<sup>۶۶</sup> (CHD) است، اگر طبق تعریف فوق اشتراک آن با هر خط افقی، تهی یا همبند باشد.

لم ۱۴.۴.۱. (پومرنکه<sup>۶۷</sup> [۷۶]) فرض کنید  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی بوده،  $f(0) = 0$  و  $f'(0) \neq 0$  باشد و گیریم

$$\phi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})}$$

که  $\theta \in \mathbb{R}$  اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{\phi(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

سپس  $f$  **محدب در جهت افقی** است.

لواندوفسکی<sup>۶۸</sup>، میلر<sup>۶۹</sup> و سونکوویچ<sup>۷۰</sup> (۱۹۷۴) [۵۳] رده ی توابع  $\gamma$ -ستاره گون را معرفی نمودند که با نماد  $\mathcal{G}(1, \gamma)$  نمایش داده شده و اعضای آن در شرط زیر صادقند

$$\operatorname{Re} \left\{ \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^\gamma \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

<sup>۶۳</sup>Nunokawa

<sup>۶۴</sup>Umezawa

<sup>۶۵</sup>Convex in the Direction of  $\alpha$

<sup>۶۶</sup>Convex in the horizontal direction

<sup>۶۷</sup>Pommerenke

<sup>۶۸</sup>Lewandowski

<sup>۶۹</sup>Miller

<sup>۷۰</sup>Złotkiewicz

نانوکاوا و سوکول<sup>۷۱</sup> [۷۱] این رده را به  $\mathcal{G}(\alpha, \gamma)$  گسترش داده و آن را توابع  $\gamma$ -قویا ستارلاگون از مرتبه  $\alpha$ <sup>۷۲</sup> نامیدند که شامل توابع  $f \in \mathcal{A}$  با خاصیت

$$\left| \arg \left\{ \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^\gamma \right\} \right| < \alpha \frac{\pi}{\gamma}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (17.1)$$

هستند که  $0 < \alpha \leq 1$ ،  $\gamma > 0$  و  $f(z)$  با قید  $\left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \neq 0$  برای  $f(z) \in \mathcal{A}$  انتخاب می شود. نکته اینکه  $\mathcal{G}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{S}^*[\beta]$  و

**قضیه ۳.۴.۱.** گیریم  $0 < \alpha \leq 1$ ،  $\gamma > 0$  و  $f \in \mathcal{A}$  بشکل (۱.۱) باشد که در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر معادله ی نسبت به  $x$ :

$$x + \frac{2\gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{xn(x) \sin \frac{(1-x)\pi}{\gamma}}{m(x) + xn(x) \cos \frac{(1-x)\pi}{\gamma}} = \alpha \quad (18.1)$$

با  $m(x) = (1+x)^{\frac{1+x}{\gamma}}$  و  $n(x) = (1-x)^{\frac{x-1}{\gamma}}$  دارای جواب  $\beta \in (0, 1]$  باشد آنگاه  $f \in \mathcal{G}(\alpha, \gamma)$ .

**قضیه ۴.۴.۱.** برای  $0 < \alpha \leq 1$ ،  $0 < \gamma \leq 1$  و  $f \in \mathcal{A}$  بفرم (۱.۱) که در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر معادله (۱۸.۱) دارای جواب  $0 < \alpha_0 \leq 1$  باشد، آنگاه  $f \in \mathcal{K}\left[\frac{(1-\gamma)\alpha_0 + \alpha}{\gamma}\right]$ .

**نتیجه ۱.۴.۱.** فرض کنید که معادله (۱۸.۱) دارای جواب  $0 < \alpha_0 < \alpha \leq 1$  است. اگر  $0 < \delta < \gamma$  سپس  $\mathcal{G}(\alpha, \gamma) \subset \mathcal{G}(\alpha, \delta)$ .

**قضیه ۵.۴.۱.** فرض بگیریم  $0 < \alpha \leq 1$  و  $\gamma < 0$  و  $f \in \mathcal{A}$  به شکل (۱.۱) است و در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر  $\beta = \frac{\alpha - \gamma}{1 - \gamma}$  آنگاه  $f \in \mathcal{S}^*[\beta]$  است. **سیر و گوان** [۹۸] رده ی زیر را معرفی کردند (۲۰۱۳):

**تعریف ۳.۴.۱.** برای اعداد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  با شرط  $1 < \beta < \alpha < 1 \leq 0$ ، تابع  $f(z) \in \mathcal{A}$  متعلق به رده ی  $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$  است اگر  $f(z)$  در نابرابری زیر صدق نماید

$$\alpha < \operatorname{Re} \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) < \beta, \quad z \in \mathbb{D} \quad (19.1)$$

بوضوح  $\mathcal{K}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{K}$  بوده و (۲۳.۱) این شروط معادل را در اختیار ما قرار می دهد:

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} < \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{D}, 0 \leq \alpha < 1 \quad (20.1)$$

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} < \frac{1 + (1 - 2\beta)z}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{D}, \beta > 1 \quad (21.1)$$

<sup>۷۱</sup>Sokol

<sup>۷۲</sup> $\gamma$ -Strongly Starlike Functions of Order  $\alpha$

در این مورد آنها از تابع

$$p(z) = 1 + i \frac{\beta - \alpha}{\pi} \log \left( \frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} z}}{1-z} \right), \quad z \in \mathbb{D} \quad (22.1)$$

استفاده کردند که  $\mathbb{D}$  را به نوار محدب  $\alpha < \operatorname{Re} w < \beta$  می نگارد و توسط **گوروگی**<sup>۷۳</sup> و **اوا**<sup>۷۴</sup> [۵۲] معرفی شد، بنابراین

لم ۱۵.۴.۱. بازای اعداد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  با محدودیت  $0 \leq \alpha < 1 < \beta$ ، تابع  $f(z) \in \mathcal{A}$  در رده ی  $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$  قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} < 1 + i \frac{\beta - \alpha}{\pi} \log \left( \frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} z}}{1-z} \right), \quad z \in \mathbb{D} \quad (23.1)$$

و برآورد کران ضرایب را برای  $f \in \mathcal{K}(\alpha, \beta)$  بشکل زیر بدست می دهد

$$|a_n| \leq \begin{cases} \frac{1}{2} |B_1| & ; n = 2, \\ \frac{|B_1|}{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n-2} \left( 1 + \frac{|B_1|}{k} \right) & ; n = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (24.1)$$

که

$$|B_1| = \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \sin \frac{(1 - \alpha)\pi}{\beta - \alpha}.$$

لم ۱۶.۴.۱. برای اعداد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  به شرط  $0 \leq \alpha < 1 < \beta < 2$ ، اگر  $f \in \mathcal{K}(\alpha, \beta)$  سپس

$$\frac{1}{2 - \alpha} < \operatorname{Re} \sqrt{f'(z)} < \frac{1}{2 - \beta}$$

## ۵.۱ رده ی $\mathbb{P}$

این خانواده از توابع شامل تمام توابع مانند  $p$  است که در  $\mathbb{D}$  تحلیلی بوده و  $\operatorname{Re} p(z) > 0$  و بعلاوه در قرص واحد بصورت  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$  باشند. فرمول نمایش **هرگلوت**<sup>۷۵</sup> نشان می دهد که

لم ۱.۵.۱.  $p(z) \in \mathbb{P}$  اگر و فقط اگر  $p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} d\gamma(t)$  چنانکه  $\gamma$  صعودی بوده و  $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$ .

<sup>۷۳</sup> Kuroki

<sup>۷۴</sup> Owa

<sup>۷۵</sup> Herglotz

لم ۲.۵.۱. (کاراتئودوری<sup>۷۶</sup> [۷۷]) اگر  $p(z) \in \mathbb{P}$  سپس  $|c_n| \leq 2$  برای هر  $n$ . تابع  $p_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$  تابع اکستریمال برای این رده بوده که تابعی محدب است. بدیهی است که

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow z \frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathbb{P}$$

## ۶.۱ نزدیک به محدب

یک دامنه  $D$  را **نزدیک به محدب**<sup>۷۷</sup> گوئیم اگر مکمل  $D$  را بتوان با اجتماعی از نیمخط های نامتقاطع نشان داد. تابع تک ارز  $f$  در  $\mathbb{D}$  را نزدیک به محدب گوئیم اگر برد آن  $f(\mathbb{D})$  دامنه ای نزدیک به محدب باشد. چنین تعریف هندسی، دارای صورت تحلیلی زیر است:

**تعریف ۱.۶.۱.** یک تابع به شکل (۱.۱) را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره گونی مانند  $g$  و تابع  $h \in \mathbb{P}$  چنان وجود داشته باشند که

$$zf'(z) = g(z)h(z) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این رده توسط **کاپلان**<sup>۷۸</sup> (۱۹۵۲) معرفی شد و وی ثابت کرد که زیرمجموعه توابع تک ارز است. زیررده نزدیک به محدب از  $\mathcal{S}$  را که شامل تمام توابع نزدیک به محدب تک ارز باشند را  $\mathcal{C}$  می نمایانیم. بوضوح  $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ .

تعریف معادل دیگری بیان می کند که تابع  $f(z)$  را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره گون  $g$  باشد که

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D} \quad (25.1)$$

این معادل با آن است که بگوئیم تابع محدب تک ارز (و نه لزوما نرمال شده)  $h$  باشد که

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D} \quad (26.1)$$

بنابر قضیه **نوشیرو**<sup>۷۹</sup> - **ورشائوسکی**<sup>۸۰</sup> ([۳۱]، ص ۴۷)، هر تابع  $f(z) \in \mathcal{A}$  با  $\operatorname{Re} f'(z) > 0$  تک ارز و نزدیک به محدب است. با انتخاب مناسبی از  $g$  در (۲۵.۱) می توان زیررده ای از توابع نزدیک محدب

$$\operatorname{Re} \left\{ \prod_{j=1}^n (z - e^{i\alpha_j})^{\sigma_j} f'(z) \right\} > 0 \quad (27.1)$$

<sup>۷۶</sup> Caratheodory

<sup>۷۷</sup> Close-to-Convex

<sup>۷۸</sup> Kaplan

<sup>۷۹</sup> Noshiro

<sup>۸۰</sup> Warschawski

را یافت که  $\sum_{j=1}^n \sigma_j \leq 2$  و  $0 \leq \sigma_j \leq 1$ ،  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 2\pi$

لم ۱.۶.۱. (کاپلان [۳۱]) گیریم  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و موضعا تک ارز باشد و در شرط

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > -\frac{1}{3}$$

بازای تمام  $z \in \mathbb{D}$  صدق نماید، سپس  $f$  در  $\mathbb{D}$  تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۶.۱. تابع  $f(z) \in \mathcal{A}$  را **نزدیک به محدب از مرتبه  $\alpha$** <sup>۸۱</sup> گوئیم ( $0 \leq \alpha < 1$ ) اگر بازای تابع محدب تک ارز  $h$  روی  $\mathbb{D}$  (که این تابع لزوما نرمال شده نیست) داشته باشیم

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}$$

رده ی تمام چنین توابعی را با  $\mathcal{C}(\alpha)$  نشان می دهیم.

## ۷.۱ خانواده بازیلویچ

این رده تعمیمی از رده توابع نزدیک به محدب بحساب می آید. با فرض اینکه  $g(z)$  در  $\mathbb{D}$  ستاره گون بوده و  $p$  تابعی تحلیلی در قرص واحد با شرط  $\operatorname{Re} p(z) > 0$  باشد. سپس **بازیلویچ**<sup>۸۲</sup> نشان داد که تابع

$$f(z) = \left( \int_0^z p(\zeta) g(\zeta)^\alpha \zeta^{i\beta-1} d\zeta \right)^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad (28.1)$$

در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و تک ارز است [۱۱]. رده ای که از این توابع ایجاد می شود را با  $B(\alpha + i\beta)$  نشان می دهیم. مسلما  $B(1)$  رده ی توابع **نزدیک به محدب** نرمال شده است. در [۳۳] نشان داده شده که اگر  $f(z) \in B(\alpha + i\beta)$  با  $p(z) = 1$  آنگاه  $f(z)$  باید در رابطه

$$\operatorname{Re} \left\{ (\alpha - 1 + i\beta) z \frac{f'(z)}{f(z)} + \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0 \quad (29.1)$$

برای  $z \in \mathbb{D}$  صدق کند. بالعکس اگر  $f(z)$  در  $\mathbb{D}$  با شروط  $f(0) = 0$  و  $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$  برای  $z \in \mathbb{D}$  تحلیلی بوده و در (۱.۲۹) صدق نماید سپس  $f(z)$  را می توان به شکل (۱.۲۸) بازای  $p(z) = 1$  نوشت.

<sup>۸۱</sup> Close-to-Convex of order  $\alpha$

<sup>۸۲</sup> Bazilevič



## ۸.۱ مارپیچ گون ها

تعمیمی از ستاره گونها وجود دارد که بعنوان **مارپیچ گون<sup>۸۳</sup>** شناخته می شوند و در ۱۹۳۳ توسط **اسپاسکی<sup>۸۴</sup>** معرفی شد [۱۰۰]. یک مارپیچ لگاریتمی، یک منحنی در صفحه مختلط به شکل  $w = w_0 e^{-\lambda t}$  است که  $t \in \mathbb{R}$  بوده،  $w_0 \neq 0$  و  $\lambda$  ثابتهای مختلط با شرط  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  هستند. بدون کاستن از کلیت می توان با فرض  $\lambda = e^{i\alpha}$  که  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  منحنی را **مارپیچ گون<sup>۸۵</sup>** نامید.

دامنه  $D$  شامل مبداء را  $\alpha$ -مارپیچ گون نامیم اگر برای هر نقطه  $w_0 \neq 0$  در  $D$ ، قوس  $\alpha$ -مارپیچی از  $w_0$  تا مبداء، کاملاً در  $D$  قرار گیرد. یک دامنه  $\alpha$ -مارپیچ گون همبند ساده است.

تابع  $f \in \mathcal{A}$  را  $\alpha$ -مارپیچ گون نامیم اگر بردش  $\alpha$ -مارپیچ گون باشد. تابع مارپیچ گون است اگر بازای  $\alpha$   $\alpha$ -مارپیچ گون باشد. توابع  $0$ -مارپیچ گون بوضوح ستاره گونند. **مارپیچ گونی<sup>۸۶</sup>** را می توان با شرطی تحلیلی که تاحدودی همان تعمیم شرط ستاره گونی است مشخصه سازی نمود:

**قضیه ۱.۸.۱. [۳۱]** گیریم  $f \in \mathcal{A}$  با  $f'(z) \neq 0$  بازای  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$  بوده و  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  باشد. سپس  $f$ ،  $\alpha$ -مارپیچگون است اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (30.1)$$

رده ی تمام توابع  $\alpha$ -ستاره گون در  $\mathcal{S}$  را با  $\mathcal{S}^{sp}(\alpha)$  نشان می دهیم. قضیه فوق بیان می کند که (30.1) شرطی کافی برای تک ارزی است. مشاهدات هندسی نشان می دهد که برای  $\alpha \neq 0$ ، یک تابع  $\alpha$ -مارپیچ گون لازم نیست **تابع نزدیک به محدب<sup>۸۷</sup>** باشد. یک مثال تابع

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2 e^{i\alpha \cos \alpha}} \in \mathcal{S}^{sp}(\alpha) \quad (31.1)$$

است که  $\mathbb{D}$  را به مکمل قوسی از یک  $\alpha$ -مارپیچ می نگارد. این تابع همان نقشی را بازی می کند که **تابع کوبه<sup>۸۸</sup>** برای توابع ستاره گون بازی کرده و در واقع اکستریمال برای توابع  $\alpha$ -مارپیچ گون است. از طرفی **تابع نزدیک به محدب** لازم نیست مارپیچ گون باشد مانند تابع

$$f(z) = \frac{z - z^2 \cos \phi}{(1 - e^{i\phi} z)^2}, \quad \cos \phi \neq 0 \quad (32.1)$$

<sup>۸۳</sup> Spirallike Class

<sup>۸۴</sup> Spacek

<sup>۸۵</sup>  $\alpha$ -spiral

<sup>۸۶</sup> Spirallikeness

<sup>۸۷</sup> Close-to-convex function

<sup>۸۸</sup> Koebe function

که  $\mathbb{D}$  را به مکمل یک نیمخط غیر شعاعی می نگارد. **کولشستر<sup>۸۹</sup>** [۵۰] زیررده ی  $S^{sp}(\alpha, \gamma) \subset S^{sp}(\alpha)$  از توابع  $\gamma$ -ماریچ گون از مرتبه  $\alpha$  را چنین معرفی کرد:

**تعریف ۱.۸.۱.** [۵۰] گیریم  $f \in \mathcal{A}$  با شرط  $f'(z) \neq 0$  بازای  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$  باشد. سپس  $f \in S^{sp}(\alpha, \gamma)$  اگر و تنها اگر اعداد حقیقی  $-\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$  و  $0 \leq \gamma < 1$  چنان موجود باشند که

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > \gamma \cos \alpha, \quad z \in \mathbb{D} \quad (۳۳.۱)$$

## ۹.۱ رده ی $\mathcal{T}$

رده ی  $\mathcal{T}$  شامل تمام اعضائی از  $S$  است که ضرایب ناصفر آن از دومی بعد منفی اند، یعنی تابعی تحلیلی و تک ارز  $f$  در  $\mathcal{T}$  است اگر به شکل

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$$

باشد. متناظر با این مجموعه،  $\mathcal{T}^*(\alpha)$  و  $\mathcal{TK}(\alpha)$  زیر رده هائی از  $\mathcal{T}$  خواهند بود که به ترتیب ستاره گون و محدب از مرتبه  $\alpha$  هستند. بدین ترتیب  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*(0)$ .

**لم ۱.۹.۱.** [۹۷] تابع  $f = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$  در  $\mathcal{T}^*(\alpha)$  است اگر  $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ .

**لم ۲.۹.۱.** [۹۷] تابع  $f = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \in \mathcal{A}$  در  $\mathcal{T}^*(\alpha)$  است (که  $0 \leq \alpha < 1$ ) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \quad (۳۴.۱)$$

**لم ۳.۹.۱.** [۹۷] اگر  $f = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \in \mathcal{T}^*(\alpha)$  به شرط  $0 \leq \alpha < 1$ ، آنگاه  $|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n-\alpha}$  که تساوی تنها برای توابعی بشکل  $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n$  برقرار است.

**لم ۴.۹.۱.** [۹۷] تابع  $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$  در رده ی  $\mathcal{TK}^*(\alpha)$  (که  $0 \leq \alpha < 1$ ) قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \quad (۳۵.۱)$$

لم ۵.۹.۱. [۹۷] اگر  $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$  (که  $0 \leq \alpha < 1$ ) سپس

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \quad (36.1)$$

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \quad (37.1)$$

و تساوی برای تابع  $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} z^2$  برقرار است که  $z = \pm r$ .

لم ۶.۹.۱. [۹۷] اگر  $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$  (با  $0 \leq \alpha < 1$ ) آنگاه

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \quad (38.1)$$

$$1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \quad (39.1)$$

تساوی بازای تابع  $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$  برقرار می باشد که  $z = \pm r$ .

لم ۷.۹.۱. [۹۷] اگر  $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$  سپس  $f \in \mathcal{T}^*(\frac{2}{3-\alpha})$ ، نتیجه با تابع اکستریمال  $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$  دقیق است.

لم ۸.۹.۱. [۹۷] اگر  $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$  آنگاه **شعاع تحدب**<sup>۹۰</sup> تابع  $f(z)$  عبارتست از

$$r_{con}(\alpha) = \inf_{n \geq 2} \left( \frac{n-\alpha}{n^2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

این مقدار برای تابع اکستریمال  $f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n$  بازای  $n$  دقیق است.

لم ۹.۹.۱. [۹۷] اگر  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}$  آنگاه  $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$

## ۱۰.۱ ستاره‌گون نسبت به نقاط متقارن

گیریم  $f(z)$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی بوده و فرض کنید برای هر  $r$  کمتر از واحد و بقدر کافی نزدیک به ۱ و هر  $\zeta$  روی  $|z| = r$ ، سرعت زاویه ای  $f(z)$  حول نقطه  $f(-\zeta)$  در  $z = \zeta$  مثبت است چنانکه  $z$  دایره  $|z| = r$  را در جهت مثبت می پیماید و بعبارت تحلیلی

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-\zeta)} > 0, \quad z = \zeta, |\zeta| = r \quad (40.1)$$

دراینصورت  $f(z)$  را **نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون**<sup>۹۱</sup> نامیم. بدهتا رده ی چنین توابع تک ارزی شامل توابع محدب و توابع فرد ستاره‌گون نسبت به مبداء خواهد شد. بیان معادلی از این تعریف توسط **ساگاگوچی**<sup>۹۲</sup> ثابت شد و ما آنرا بعنوان تعریف می پذیریم:

<sup>۹۰</sup> Convexity radius

<sup>۹۱</sup> Starlike with respect to symmetric points

<sup>۹۲</sup> Sakaguchi

تعریف ۱.۱۰.۱. [۹۳] تابع  $f(z) \in \mathcal{A}$  نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون است اگر

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با  $\mathcal{S}_s^*$  مشخص می کنیم.

لم ۱.۱۰.۱. [۹۳] گیریم  $f \in \mathcal{S}_s^*$ . سپس  $|a_n| \leq 1$  برای  $n \geq 2$ ، تساوی برای تابع  $\frac{z}{1+\varepsilon z}$  با  $|\varepsilon| = 1$  حاصل می گردد.

تعمیمی از این تعریف را ساکاگوچی چنین بیان می کند:

لم ۲.۱۰.۱. [۹۳] گیریم  $f \in \mathcal{A}$  و فرض کنید برای  $k$  صحیح مثبتی نابرابری

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(\varepsilon^j z)}{\varepsilon^j}} > 0, \quad z \in \mathbb{D} \quad (4.1)$$

برای  $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$  برقرار باشد. آنگاه  $f(z)$  در  $\mathbb{D}$  تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۱۰.۱.  $f(z) \in \mathcal{A}$  نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون از مرتبه  $\alpha$  است اگر

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}$$

که  $0 \leq \alpha < 1$ . این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با  $\mathcal{S}_s^*(\alpha)$  مشخص می کنیم.

## ۱۱.۱ خانواده UST

همانگونه که گفتیم ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای نگاشت های همدیس است اما همیشه چنین نیست که  $f \in \mathcal{S}^*$  هر زیرقرص  $|z_0| < 1 - \rho < |z - z_0|$  را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به  $f(z_0)$  بنگارد. این واقعیت را براون<sup>۹۴</sup> در ۱۹۸۹ ثابت کرد [۱۸]. وی نشان داد که هر  $f \in \mathcal{S}$  هر زیرقرص بقدر کافی کوچکی از  $\mathbb{D}$  را به قرص ستاره‌گون خیلی کوچک می نگارد. در حالت کلی تر مجموعه توابعی با این خاصیت را که هر قرص  $\{z - z_0\} \subset \mathbb{D}$  را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به  $f(z_0)$  می نگارند توسط گودمن<sup>۹۵</sup> از دید تحلیلی و هندسی مورد بررسی قرار گرفت ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۱.۱. تابع  $f(z) \in \mathcal{S}^*$  را در  $\mathbb{D}$  ستاره‌گون یکنواخت<sup>۹۶</sup> گوئیم اگر هر قوس مدور  $\gamma$  درون  $\mathbb{D}$  با مرکز  $\zeta \in \mathbb{D}$  را به قوس ستاره‌گون  $f(\gamma)$  نسبت به  $f(\zeta)$  بنگارد.

<sup>۹۳</sup> Starlike with respect to symmetric points of order  $\alpha$

<sup>۹۴</sup> Brown

<sup>۹۵</sup> Goodman

<sup>۹۶</sup> Uniformly starlike

خانواده همه چنین توابعی را با  $UST$  نشان داده و شرط لازم و کافی برای آنکه تابع  $f(z) \in S$  در این رده باشد آنستکه [۴۱]:

$$\operatorname{Re} \frac{(z - \zeta)f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} > 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (۴۲.۱)$$

از طرفی با تعریف  $1 = \frac{(z - \zeta)f'(z)}{f(z) - f(\zeta)}$  به آسانی مشخص می شود که  $UST \subset S^*$ . این رده تحت چرخش، یا دوران  $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$  (بازای  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) و انتقال<sup>۹۷</sup>،  $\frac{1}{t} f(tz)$ ،  $0 < t \leq 1$  حفظ می شود ولی پایای خطی نیست، در واقع خودریختی قرص تابع  $f(z) = \frac{z}{1 - \frac{1}{3}z}$  متعلق به رده  $UST$  نمی شود.

بازای  $\zeta = -z$  در (۴۲.۱) بوضوح  $UST \subset S_s^*$  و در نتیجه برای  $f \in UST$ ،  $|a_n| \leq 1$  است اما کران بهتر  $|a_n| \leq \frac{2}{n}$  توسط هورowitz<sup>۹۸</sup> بدست آمد [۴۱]. تعیین مقدار دقیقی از کران ضرایب توابع این رده  $UST$  هنوز مسئله ی باز بشمار می رود. یافتن اکثر خواص رده ی  $UST$  کاری مشکل محسوب می شود ولی بعنوان نمونه اشاره می کنیم به کارگودمن، وی نشان داد

$$|A| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ اگر } f(z) = \frac{z}{1 - Az} \in UST \text{ و فقط اگر } \quad (۴۳.۱)$$

همچنین وی ثابت نمود که برای  $|B| \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ ، تابع  $f(z) = z + Bz^n$  بازای  $n > 1$  در  $UST$  واقع می شود. مرکز<sup>۹۹</sup> و سلماسی<sup>۱۰۰</sup> [۶۱] این کران را به  $|B| \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n^3}}$  برای  $n > 1$  ارتقاء دادند و بیان کردند که این مقدار دقیق نیست. کران ظریف توسط نژدمیتف<sup>۱۰۱</sup> در ۱۹۹۷ حاصل شد ([۶۸]، نتیجه ۴، ص ۴۷) وی نشان داد برای  $n = 2$ ،  $|B| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$  و برای  $n = 3$ ،  $|B| \leq \frac{1}{3\sqrt{573}}$ . رونینگ<sup>۱۰۲</sup> [۸۶]، مرکز و سلماسی [۶۱] نتیجه مهم زیر را بدست آوردند:

لم ۱.۱۱.۱. [۸۶]، لم ۳.۳، ص ۲۳۶)  $f(z) \in UST$  اگر و فقط اگر برای هر  $z \in \mathbb{D}$  و  $|x| = 1$ ،

$$\operatorname{Re} \frac{f(z) - f(xz)}{(1-x)zf'(z)} \geq 0$$

لم ۲.۱۱.۱. [۸۶]  $f(z) \in UST$  اگر و فقط اگر برای هر  $z \in \mathbb{D}$  و  $|t| = 1$ ،  $\operatorname{Re} \frac{(1-t)zf'(z)}{f(z) - f(tz)} > 0$ .

لم ۳.۱۱.۱. [۶۱]، قضیه ۴، ص ۴۵۱)  $f \in UST$  اگر بازای همه  $w, z \in \mathbb{D}$ ،

$$\operatorname{Re} \frac{f'(w)}{f'(z)} > 0$$

<sup>۹۷</sup> Transformations

<sup>۹۸</sup> Charles Horowitz

<sup>۹۹</sup> Merkes

<sup>۱۰۰</sup> Salmassi

<sup>۱۰۱</sup> Nezhmetdinov

<sup>۱۰۲</sup> Rønning

و اگر  $f \in UST$  آنگاه برای تمام  $z, w \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{f'(w)}{f'(z)} \right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

نمای  $\frac{1}{2}$  بهترین مقدار ممکن است.

بررسی بیشتر روی رده ی  $UST$  از بسط سری تیلور<sup>۱۰۳</sup> (۴۲.۱) حول  $z$  و به طور جداگانه  $\zeta$  حاصل می شود. گیریم  $p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$  و  $q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots$

$$\frac{(z - \zeta)f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\zeta) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z) \zeta^n, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (44.1)$$

چنانکه  $\operatorname{Re} p(z) > 0$  و  $\operatorname{Re} q(z) > 0$  سپس

لم ۴.۱۱.۱. [۴۱]، لم ۱ ص ۳۶۵) اگر  $f \in UST$  آنگاه

$$p_0(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta}, \quad p_1(\zeta) = \frac{f(\zeta)[1 - 2a_2\zeta] - \zeta}{\zeta^2}, \quad q_0(z) = \frac{f(z)}{zf'(z)}, \quad q_1(z) = \frac{f(z) - z}{z^2 f'(z)}$$

و

$$|p_1(\zeta)| \leq 2 \operatorname{Re} p_0(\zeta), \quad |q_1(z)| \leq 2 \operatorname{Re} q_0(z)$$

این لم و برآورد کران ضرایب  $\frac{2}{n}$   $|a_n| \leq \frac{2}{n}$  ما را به نابرابری رشد مناسبی برای اعضای  $f \in UST$  می رساند:

$$\frac{r}{1+2r} \leq |f(z)| \leq -r + 2 \ln \frac{1}{1-r}$$

بازای  $1 > r = |z|$ . در نهایت ثابت کوبه<sup>۱۰۴</sup> برای خانواده  $UST$  را بصورت

$$\frac{1}{3} \leq K(UST) \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بدست می دهد. برای یافتن شرط کافی که شامل تابعی در  $UST$  شود به روش پیچش<sup>۱۰۵</sup> نیازمندیم. جهت تعیین بزرگترین مقدار  $\delta$  چنانکه شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \delta$$

نتیجه دهد که  $f \in UST$  شود، گودمن نشان داد که  $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071\dots$  مقدار پذیرفتنی است لیکن مقدار دقیق  $\delta$  نباید از  $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.4330\dots$  تجاوز نماید. بالاخره

<sup>۱۰۳</sup>Taylor series expansion

<sup>۱۰۴</sup>Koebe constant

<sup>۱۰۵</sup>Convolution

لم ۵.۱۱.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) اگر  $f \in \mathcal{A}$  در شرط  $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \delta_0$  صدق کند، آنگاه  $f \in UST$ .

ثابت  $\delta_0$  در طرف راست برابر با  $\dots \approx 0.7963 = \frac{1}{\sqrt{M}}$  است که  $M$  بهترین مقدار ممکن بوده که در لم ۳.۱۶.۱ بدست آمد.

لم زیر با استفاده از پیچش روی توابع بیان شده است (ر. ک. ۱۶.۱):

لم ۶.۱۱.۱. ([۶۱]، قضیه ۱ ص ۴۵) گیریم  $f \in \mathcal{A}$ ،  $f \in UST$  اگر و تنها اگر برای تمام  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re} \frac{f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}}{f(z) * \frac{z}{(1-\alpha z)^2}} \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

باید توجه داشت که  $\ell(z) = \frac{z}{1-z} = \frac{1}{p_0-1}$  در رده ی  $UST$  نیست. رونینگ ثابت کرد که  $UST \not\subset S^*(\frac{1}{p})$  و مسئله تعیین بزرگترین  $\alpha$  را مطرح کرد چنانکه  $UST \subset S^*(\alpha)$ . نژمدیتنف نشان داد که  $UST \not\subset S^*(\alpha_0)$  بازای  $\alpha_0 \approx 0.1483$  درست است. اما یافتن بزرگترین  $\alpha$ ی چنانکه  $UST \subset S^*(\alpha)$  مسئله ی باز است.

## ۱۲.۱ رده ی $UCV$

بعنوان یادآوری گفتیم که ستاره گونی خاصیتی ارثی برای توابع همدیس است اما همیشه چنین نیست که  $f \in S^*$  هر قرص  $|z_0| - 1 < \rho < |z_0|$  را به دامنه ای ستاره گون نسبت به  $f(z_0)$  بنگارد. چنین خاصیتی در تحدب نیز برقرار است و گودمن چنین توابعی را از دید تحلیلی و هندسی بررسی نمود که در آن توابع، هر زیرقرص را به مجموعه ای محدب می نگارند ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۲.۱. تابع  $f(z) \in \mathcal{S}$  را در  $\mathbb{D}$  محدب یکنواخت<sup>۱۰۶</sup> گوئیم اگر هر قوس مدور  $\gamma$  در  $\mathbb{D}$  با مرکز  $\zeta \in \mathbb{D}$  را به ناحیه محدب  $f(\gamma)$  بنگارد. خانواده همه چنین توابعی با این خاصیت را با  $UCV$  نشان داده و شرطی لازم و کافی برای توابع  $f \in \mathcal{S}$  در این رده این است که [۴۰]:

$$\operatorname{Re} \left( 1 + (z - \zeta) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (۴۵.۱)$$

واضح است که  $UCV \subset \mathcal{K}$  بازای  $\zeta = -z$  در (۴۵.۱)، داریم  $UCV \subset \mathcal{K}(\frac{1}{p})$  و از آنجا برای  $f \in UCV$ ،  $|a_n| \leq \frac{1}{n}$  با استفاده از تابع  $f(z) = \frac{z}{1-Az}$  نشان داد که خانواده  $UCV$

<sup>۱۰۶</sup>Uniformly convex

پایای خطی نیست ([۴۰]، قضیه ۵ ص ۹۰). وی ثابت نمود  $f(z) = \frac{z}{1-Az} \in UCV$  اگر و فقط اگر  $|A| \leq \frac{1}{3}$ .

لم ۱.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) برای  $f = z + Bz^n \in UCV$ ،  $n \geq 2$  اگر و فقط اگر

$$|B| \leq \frac{1}{n(2n-1)}$$

لم ۲.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) اگر  $f \in A$  در شرط  $\sum_{n=2}^{\infty} n(2n-1)|a_n| \leq 1$  صدق کند سپس  $f \in UCV$ . ثابت ۱ در طرف راست بهترین مقدار ممکن است.

مشخصه سازی تک-متغیره بسیار مهمی از رده ی  $UCV$  توسط رونینگ ([۸۸]، قضیه ۱ ص ۱۹۰) و مستقلاً ما<sup>۱۰۷</sup> و میندا<sup>۱۰۸</sup> ([۵۷]، قضیه ۲ ص ۱۶۷) حاصل شد:

لم ۳.۱۲.۱.  $f \in UCV$  اگر و فقط اگر

$$\operatorname{Re} \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|, \quad z \in \mathbb{D} \quad (۴۶.۱)$$

در نتیجه اگر  $\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{1}{3}$  سپس  $f \in UCV$ . از طرفی مشابه قضیه ی الکساندر برای توابع تحلیلی ۱.۴.۱ را نمی توان بین رده های  $UCV$  و  $UST$  بیان کرد [۴۰، ۸۸].

## ۱۳.۱ رده ی $S_p$

حال فرض کنید  $w = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$ ، طبق (۴۶.۱) تعریف کنید

$$\Omega_p = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > |w-1|\} \quad (۴۷.۱)$$

مجموعه  $\Omega_p$  درون سهمی  $(\operatorname{Im} w)^2 = 2\operatorname{Re} w - 1$  قرار می گیرد که نسبت به محور حقیقی متقارن بوده و راس آن  $(\frac{1}{2}, 0)$  است. پس  $f \in UCV$  اگر و فقط اگر  $1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in \Omega_p$ . خانواده  $S_p$  چنین تعریف می شود:

تعریف ۱.۱۳.۱. رده ی  $S_p$  از توابع ستارلاگون سهموی<sup>۱۰۹</sup> شامل تمام توابع  $f \in A$  است که در شرط زیر صدق می کنند:

$$\operatorname{Re} \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right|, \quad z \in \mathbb{D} \quad (۴۸.۱)$$

<sup>۱۰۷</sup>Ma

<sup>۱۰۸</sup>Minda

<sup>۱۰۹</sup>Parabolic starlike functions



بوضوح  $S_p \subset S^*$  و چون ناحیه سهموی  $\Omega_p$  درون نیم صفحه  $\left\{ w : \operatorname{Re} w > \frac{1}{p} \right\}$  و قطاع  $\{w : |\arg w| < \frac{\pi}{4}\}$  قرار می‌گیرد لذا  $S_p \subset S^*(\frac{1}{p}) \cap S_p^*$  [۸۸]. همچنین (۴۶.۱) و (۴۸.۱) طبق قضیه **الکساندر ۱.۴.۱** نشان می‌دهند

$$f \in UCV \iff z f'(z) \in S_p \quad (۴۹.۱)$$

اما آیا رابطه ای شبیه (۴۹.۱) بین  $S_p$  و  $UST$  وجود دارد؟ پاسخ منفی است. **گودمن [۴۰]** و **رونینگ [۸۶]** نشان دادند

$$S_p \not\subset UST, \quad UST \not\subset S_p$$

همچنین اگر  $\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{p}$  بنا براین  $f \in S_p$ .

## ۱۴.۱ ستاره‌گون ما-میندا

**ما** و مستقلا توسط **میندا** (۱۹۹۲م.) نمایش های از یکپارچه کردن برخی زیر رده های ستاره‌گون و محدب را با **اصل تابعیت** یافتند. گیریم  $\phi$  تابعی تحلیلی با جزء حقیقی مثبت بوده و با شرایط  $\phi(0) = 1, \phi(0) > 0, \phi'(0) > 0$  نرمال شده و  $\phi, \mathbb{D}$  را به ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به ۱ و متقارن نسبت به محور طولها بنگارد. آنها این زیر رده ها را از توابع ستاره‌گون و محدب معرفی نمودند.

$$S^*(\phi) = \left\{ f \in A : z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \phi(z), z \in \mathbb{D} \right\}$$

در ادبیات، توابعی که در این رده اند را به ترتیب **ستاره‌لاگون ما-میندا<sup>۱۱۰</sup>** و **محدب ما-میندا<sup>۱۱۱</sup>** خوانند.

## ۱۵.۱ عملگرهای میانگین

فرض بگیریید  $co(E)$  **پوش محدب<sup>۱۱۲</sup>** مجموعه  $E$  در  $\mathbb{C}$  باشد. **میلر** و **موکانو<sup>۱۱۳</sup>** [۶۲] مفهوم **عملگر میانگین<sup>۱۱۴</sup>** روی مجموعه  $K \subset H(\mathbb{D})$  را تعریف نمودند. بدین شکل که **عملگر میانگین** یک عملگر  $I : K \rightarrow H$  است که در  $I[f](0) = f(0)$  صدق کرده و

$$I[f](\mathbb{D}) \subset co(f(\mathbb{D})) \quad (۵۰.۱)$$

<sup>۱۱۰</sup> Ma-Minda starlike

<sup>۱۱۱</sup> Ma-Minda convex

<sup>۱۱۲</sup> Convex hull

<sup>۱۱۳</sup> Mocanu

<sup>۱۱۴</sup> Averaging operator

برای تمام  $f \in K$  درست باشد. یک شرط لازم و کافی برای **عملگر میانگین** چنین است:  
 لم ۱.۱۵.۱. ([۶۲]، لم ۲) گیریم  $K \subset H$  و فرض کنید **عملگر میانگین**  $I : K \rightarrow H$  بازای تمام  $f \in K$  در  $I[f](\circ) = f(\circ)$  صدق نماید. شرط لازم و کافی برای  $I$  روی  $K$  **عملگر میانگین** باشد آنستکه

$$(f \in K, h \text{ باشد } f \prec h) \iff I[f] \prec h. \quad (۵۱.۱)$$

همچنین نویسندگان فوق مثال زیر را ارائه دادند:

$$I_\gamma[f](z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z f(t)t^{\gamma-1} dt \quad (۵۲.۱)$$

که یک **عملگر میانگین** روی  $H$  است برای  $\text{Re } \gamma > 0$ . آنها تعمیمی از (۵۲.۱) را به شکل

$$I_{\beta, \gamma}[f](z) = \left[ \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z f^\beta(t)t^{\gamma-1} dt \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (۵۳.۱)$$

برای  $\text{Re } \gamma > 0$  ارائه دادند [۶۳] و نشان دادند که این عملگرها، **عملگر میانگین** روی مجموعه های خاصی از  $H$  می باشند.

## ۱۶.۱ پیچش

مطالعه ی پیچش روی توابع تحلیلی در اواسط قرن بیستم انجام گرفت و بعنوان ابزاری جانبی جهت بررسی رده ی توابع تک ارز بکار رفت. در ۱۹۷۳ روشه ویه و شیل-اسمال ثابت کردند که پیچش یک تابع محدب با یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب)، خود یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب) است و پیچش تابع ستاره گون با تابع نزدیک به محدب، ستاره گون خواهد شد بعلاوه این نتیجه مهم را ثابت نمودند که با فرض  $f \in K$ ،  $F \in K$  و  $G \in C$ ، سپس  $\frac{f * zG'}{f * zF'}$  همه مقادیرش را در دامنه ی محدب  $D$  می گیرد، اگر  $\frac{G'}{F'}$  همه ی مقادیرش را در  $D$  اخذ کند. هرچند آنچه در زمینه پیچش روی توابع همساز انجام شده، قابل توجه و استفاده است لیکن خلاء موجود در کلیت دادن به مسائل قبلی کاملاً دیده می شود. تعمیم رده های قبلی از توابع همساز با استفاده از پیچش، اعمال پیچش روی توابع رده های مختلف نظیر ستاره گون و محدب و نزدیک-به-محدب و غیره از این قبیل مسائل بشمار می رود که نبود کلیت در آنها کاملاً دیده می شود. کارهای اخیر برخی مولفان در چند سال اخیر، تنها نشان دهنده تکامل بخش کوچکی از این موضوعات است و کاوش بیشتر روی این مباحث، نیازمند زمان و مطالعات بیشتر خواهد بود. استفاده از تعاریف فوق و تعمیم آنها به توابعی که حاصل کنش آنها با توابع دیگر رده ها در اثر پیچش می باشد هدف نهائی این رساله خواهد بود. هرچند تعاریف اولیه و حصول برخی ویژگی ها در این زمینه در حال انجام است لیکن تا تحویل قطعی نتایج و تایید یافته ها، اندکی زمان لازم خواهد بود.

پیچش یا ضرب هادامار<sup>۱۱۵</sup> دو تابع  $f(z)$  و  $F(z)$  با سری های توانی  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  و  $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$  را با  $f * F$  نشان داده و بشکل زیر تعریف می کنیم<sup>۱۱۶</sup>

$$(f * F)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n, \quad (54.1)$$

نگاشت  $\ell(z) = \frac{z}{1-z}$  به عنوان همانی پیچش عمل کرده و نگاشت  $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  بعنوان عمل مشتق روی توابع عمل می نماید. برخی از خواص پیچش روی توابع تحلیلی  $f$  و  $F$  چنین است:

$$f * F = F * f$$

$$\alpha(f * F) = \alpha f * F$$

$$f * \ell(z) = f$$

$$zf * zF = z(f * F)$$

$$f * \frac{1}{\alpha}(\alpha z) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha z)$$

$$\overline{f * F} = \overline{f} * \overline{F}$$

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$$

$$\alpha(f * F) = \alpha f * F$$

$$zf'(\alpha z) = f * \frac{z}{(1-\alpha z)^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} f(\alpha z) = f * \frac{z}{1-\alpha z}$$

$$zf'(z) = f * k(z)$$

$$z(f * F)' = zf' * F = f * zF'$$

$$\frac{f(\alpha z) - f(\beta z)}{\alpha - \beta} = f * \frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}$$

که  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ ، همچنین برای تابع حقیقی  $g$  داریم:

$$\operatorname{Re}(f * g) = \operatorname{Re} f * g, \quad \operatorname{Im}(f * g) = \operatorname{Im} f * g$$

در حالتی که توابع  $f(z)$  و  $F(z)$  تحلیلی اند این عمل مهم تلقی شده و به شکل ابزاری مفید در نظریه توابع تک ارز بکار گرفته شده است. رده های ستاره‌گون، محدب و تابع

<sup>۱۱۵</sup>Hadamard product

<sup>۱۱۶</sup> عبارت پیچش از آنجا آمده که برای  $|z| < \rho < 1$

$$(f * F)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f\left(\frac{z}{\zeta}\right) F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

نزدیکی به محدب تحت عمل پیچش با توابع محدب بسته اند. این موضوع توسط پولیا<sup>۱۱۷</sup> و شوئنبرگ<sup>۱۱۸</sup> حدس زده شد و بوسیله **روشه ویه و شیل-سمال**<sup>۱۱۹</sup> در ۱۹۷۳ ثابت گردید [۹۲]:  
 (الف) اگر  $f \in \mathcal{K}$  و  $F \in \mathcal{K}$ ، آنگاه  $f * F$  نیز در  $\mathcal{K}$  است.

(ب) اگر  $f \in \mathcal{K}$  و  $F \in \mathcal{C}$ ، آنگاه  $f * F$  هم در  $\mathcal{C}$  است.

(ج) اگر  $f \in \mathcal{K}$ ،  $F \in \mathcal{K}$  و  $G \in \mathcal{C}$  سپس اگر  $\frac{G'}{F'}$  همه مقادیرش را از  $D$  بگیرد آنگاه  $\frac{f * zG'}{f * zF'}$  همه مقادیرش را در دامنه محدب  $D$  خواهد گرفت.

بعلاوه

(د) اگر  $f \in \mathcal{C}$  و  $F \in \mathcal{S}^*$  آنگاه  $f * F$  هم در  $\mathcal{S}^*$  قرار می گیرد.

$$|a_n| \leq 1 \quad \text{اگر } \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \leq 1 \quad \text{اگر } f \in \mathcal{C} \text{ و آنگاه } f \in \mathcal{C} \text{ سپس}$$

$$|a_n| \leq n \quad \text{اگر } \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq 1 \quad \text{اگر } f \in \mathcal{S}^* \text{ و آنگاه } f \in \mathcal{S}^* \text{ سپس}$$

$$|a_n| \leq n \quad \text{اگر } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \quad \text{اگر } f \in \mathcal{S}^*(\alpha) \text{ و آنگاه } f \in \mathcal{S}^* \text{ سپس}$$

$$f \in \mathcal{K} \quad \text{اگر } \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \leq 1 \quad \text{اگر}$$

لم ۱.۱۶.۱. (**روشه ویه و شیل-سمال** [۹۲]) فرض کنید  $f(z)$  و  $F(z)$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی و  $f(\circ) = F(\circ) = \circ$  باشد. اگر  $f$  محدب بوده  $F$  ستاره گون باشد، آنگاه برای هر تابع  $p(z)$  که در  $\mathbb{D}$  تحلیلی است  $\text{Re } p(z) > \circ$  است داریم:

$$\text{Re} \frac{(f * pF)(z)}{(f * F)(z)} > \circ, \quad z \in \mathbb{D}$$

تعیین اینکه آیا رده ی  $UST$  تحت پیچش با توابع محدب بسته است یا خیر **مسئله ی باز** می باشد.

تعریف ۱.۱۶.۱. برای زیرمجموعه مفروض  $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ ، **مجموعه دوگان**<sup>۱۲۰</sup>  $\mathcal{V}^*$  عبارتست از

$$\mathcal{V}^* = \left\{ g \in \mathcal{A} : \frac{f * g(z)}{z} \neq \circ, \forall f \in \mathcal{V}, \forall z \in \mathbb{D} \right\}$$

**نژمدیتنف** (۱۹۹۷) ثابت کرد که برای رده ی های  $UST$  و  $UCV$ ، مجموعه های دوگان معینی از توابع در  $\mathcal{A}$  وجود دارند و نشان داد ([۶۸]، قضیه ۲ ص ۴۳) که **مجموعه دوگان** رده ی  $UST$  زیرمجموعه  $\mathcal{A}$  و شامل توابع  $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  است که

$$h(z) = \frac{z \left( 1 - \frac{w+i\alpha}{1+i\alpha} z \right)}{(1-wz)(1-z)^2}$$

<sup>۱۱۷</sup>Pólya

<sup>۱۱۸</sup>Schoenberg

<sup>۱۱۹</sup>Shiel-Small

<sup>۱۲۰</sup>Dual set

که  $w \in \mathbb{C}$ ،  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $|w| = 1$  وی برآورد یکنواخت  $|a_n(h)| \leq dn$  را برای ضریب  $n$ -ام بسط سری تیلور  $h$  در مجموعه دوگان  $UST$  با ثابت دقیق  $d = \sqrt{M} \approx 1/2557$  بدست آورد که  $M \approx 1/5770$  مقدار ماکزیمال عبارت مثلثاتی (۵۵.۱) است. با استفاده از این او ثابت کرد

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \implies f \in UST$$

کران  $\frac{1}{\sqrt{M}}$  دقیق است.

لم ۲.۱۶.۱. [۶۸] گیریم

$$G_0 = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \left[ 1 - \frac{i\alpha}{1+i\alpha} z \right], \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

آنگاه  $S^* = G_0^*$  و  $|a_n| \leq n(2n-1)$  برای هر  $g \in G_0$ .

نژمدیتنف مجموعه دوگان رده های  $UST$  و  $UCV$  را بدست آورد [۶۸]:

لم ۳.۱۶.۱. فرض کنید

$$G_1 = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \left[ 1 - \frac{(t+i\alpha)}{1+i\alpha} z \right] \left[ \frac{1}{1-tz} \right], \alpha \in \mathbb{R}, |t| = 1 \right\}$$

آنگاه  $UST = G_1^*$  و  $c_n = \sup_{g \in G_1} |a_n| \leq dn$  برای همه  $n \geq 2$  با ثابت دقیق  $d = \sqrt{M} = 1/2557 \dots$  که  $M = S(\theta_0) = 1/5770 \dots$  ماکزیمم عبارت

$$S(\theta) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 + \sqrt{\left( 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \right)^2 - \left( \frac{\sin 2\theta}{\theta} \right)^2} \right] \quad (55.1)$$

روی  $0 \leq \theta \leq \pi$  است. از اینجا نقطه اکستریمال  $\theta_0 = 0.9958 \dots$  جواب یکتای معادله

$$\theta^3 (\cos \theta + \cos 3\theta) - \theta^2 \sin 3\theta + \sin^3 \theta = 0 \quad (56.1)$$

روی پاره خط  $0.8 \leq \theta \leq 1/3$  است.

نژمدیتنف (۱۹۹۷) مجموعه دوگان رده ی  $UCV$  را یافت و نشان داد که  $|a_n| \leq n(2n-1)$  برآورد بکنواختی برای  $n$ -امین بسط تیلور توابع دوگان محسوب می شود:

لم ۴.۱۶.۱. [۶۸] فرض کنید

$$G_2 = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(1-z)^3} \left[ 1 - z - \frac{4z}{(\alpha+i)^2} \right], \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

آنگاه  $UCV = G_2^*$  و  $|a_n| \leq n(2n-1)$  برای تمام  $g \in G_2$ .

## ۱۷.۱ توابع پیش ستاره گون

تعریف ۱.۱۷.۱. تابع  $f(z) \in H(\mathbb{D})$  را **پیش ستاره گون**<sup>۱۲۱</sup> از مرتبه  $\alpha$  (با  $\alpha \leq 1$ ) نامیم اگر

$$\frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}} * f(z) \in S^*(\alpha)$$

و برای  $\alpha = 1$ ،  $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ .

مجموعه چنین توابعی با  $R_\alpha$  نموده می شود. داریم  $R_\alpha = \mathcal{K}$  و  $R_{\frac{1}{2}} = S^*(\frac{1}{2})$ .  
گیریم  $\Omega^* = \mathcal{C} - [1, \infty)$  و  $f(z) \in H(\Omega^*)$  تعریف می کنیم

$$(D^\beta f)(z) = \frac{z}{(1-z)^\beta} * f(z)$$

برای  $\beta \geq 0$ ،  $(D^1 f)(z) = f(z)$ ،  $(D^2 f)(z) = z f'(z)$  و برای  $\beta = n \in \mathbb{N}$  داریم  $D^{n+1} f = \frac{1}{n!} z(z^{n-1} f)^{(n)}$ .

**تعریف ۲.۱۷.۱.** فرض کنید  $\alpha \leq 1$  و  $p \in \mathbb{P}$  در  $\mathbb{D}$  با شرط  $p'(0) > 0$  باشد که  $p(\mathbb{D})$  نسبت به ۱ ستاره گون و نسبت به محور طولها نیز متقارن است. آنگاه رده ی  $R_\alpha^u(p)$  شامل تمام توابع تحلیلی  $f(z) \in H(\Omega^*)$  در شرط زیر صدق می کند:

$$\frac{D^{3-2\alpha} f}{D^{2-2\alpha} f} \prec p$$

با فرض  $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^m z^n$  برای  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  سپس  $f * g$  نمایشگر مشتق

**سالاگان**<sup>۱۲۲</sup>  $f$  است که  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ .

**لم ۱.۱۷.۱.** (راوی چاندران<sup>۱۲۳</sup> و دیگران. [۸۴]) اگر تابع  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی بوده و  $\operatorname{Re} p(z) > 0$  باشد آنگاه  $\{1, |2\epsilon - 1|\} \leq \max\{1, |c_2 - \epsilon c_1^2|\}$  تساوی برای  $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$  دقیق است.

ملاحظه ۱.۱۷.۱. گیریم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}$$

که  $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$  و  $\mu(t)$  اندازه احتمالاتی روی  $[0, 1]$  است.

<sup>۱۲۱</sup> Prestarlike Function

<sup>۱۲۲</sup> Sălăgean derivative

<sup>۱۲۳</sup> Ravichandran

**تعریف ۳.۱۷.۱.** فرض کنید  $f$  در یک ناحیه همبند ساده شامل مبدا تحلیلی باشد. مشتق کسری  $f$  از مرتبه  $\lambda$  را بصورت

$$D_z^\lambda f(z) := \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

تعریف می‌کنیم که چندگانگی  $(z-\zeta)^\lambda$  با این نیاز که  $\log(z-\zeta)$  برای  $z-\zeta > 0$  حقیقی است، حذف می‌شود.

با این تعریف توسیع شناخته شده‌ای از مشتق کسری و انتگرال کسری وجود دارد. **اورا** و **اسریواستاوا**<sup>۱۲۴</sup> عملگر  $\Omega^\lambda := \mathbf{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbb{D})$  را برای  $\lambda$  و اعداد حقیقی مثبت  $\lambda \neq 2, 3, 4, \dots$  بصورت

$$(\Omega^\lambda f)(z) = \Gamma(2-\lambda) z^\lambda D_z^\lambda f(z)$$

تعریف کردند. در اینجا توابع **پیش ستاره‌گون** از مرتبه مختلط تعریف می‌شوند [۹۴].

**تعریف ۴.۱۷.۱.** گیریم  $\alpha \leq 1$  و  $b \neq 0$  عددی مختلط باشد. فرض کنید  $p \in \mathbb{P}$  در  $\mathbb{D}$  با شرط  $p'(0) > 0$  بوده که  $p(\mathbb{D})$  نسبت به ۱ ستاره‌گون و نسبت به محور طولها متقارن باشد. سپس رده  $R_{\alpha,b}^u(p)$  شامل تمام توابع تحلیلی  $f(z) \in \mathbf{H}(\Omega^*)$  است که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$1 + \frac{1}{b} \left( \frac{D^{\alpha-2} f}{D^{\alpha-2} f} - 1 \right) \prec p$$

# مراجع

- [1] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- [2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), "Convolutions for special classes of harmonic univalent functions", **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.
- [3] Ahuja Om P. (2005), "Planar harmonic univalent and related mappings", **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.
- [4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), "A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution", **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.
- [5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), "Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions", **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.
- [6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), "Subclasses of harmonic mappings defined by convolution", **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).
- [7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), "Spirallike nonanalytic functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.
- [8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), "On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator", **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.
- [9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), "On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator", **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.
- [10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), "Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions", **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.



- [11] Bazilevič I. E. (1955), "On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation" (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.
- [12] Bieberbach L. (1916), "Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.
- [13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), "**Aspects of Contemporary Complex Analysis**", Academic Press, NY.
- [14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), "Coefficient estimates for a class of starlike functions", **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.
- [15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), "On some classes of bounded univalent functions", **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.
- [16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), "On some classes of bi-univalent functions", **Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.
- [17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), "On some classes of bi-univalent functions", **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.
- [18] Brown J. E. (1989), "Images of disks under convex and starlike functions", **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.
- [19] Çağlar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), "Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions", **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.
- [20] Çağlar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), "Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions", **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.
- [21] Chen M. (1975), "On the regular functions satisfying  $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \alpha$ ", **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.
- [22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), "Differential subordinations associated with multiplier transformations", **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.
- [23] Chichra P. N. (1977), "New subclasses of the class of close-to-convex functions", **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.
- [24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), "Curvature properties of planar harmonic mappings", **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

- [25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), "Harmonic Univalent Functions", **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.
- [26] de Branges L. (1985), "A proof of the Bieberbach conjecture", **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.
- [27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), "Some properties of a class of analytic functions", **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.
- [28] Dorff M. (2001), "Convolutions of planar harmonic convex mappings", **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.
- [29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), "Convolutions of harmonic convex mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.
- [30] Duren P. L. (2004), "**Harmonic Mappings in the Plane**", Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.
- [31] Duren P. L. (1983), "**Univalent Functions**", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.
- [32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), "Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function", **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.
- [33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), "On a subclass of Bazilevič functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.
- [34] El-Ashwah R. M. (2014), "Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution", **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.
- [35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), "A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure", **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.
- [36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), "New subclasses of bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.
- [37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), "Regularity theorems for harmonic functions", **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.
- [38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), "A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

- [39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), "Complex Analysis", Springer.
- [40] Goodman A. W. (1991), "On Uniformly Convex Functions", **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.
- [41] Goodman A. W. (1991), "On Uniformly Starlike Functions", **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.
- [42] Goodman A. W (1983)., "Univalent Functions", Polygonal, Washington, NJ.
- [43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), "Subordination by convex functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.
- [44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), "Stable geometric properties of analytic and harmonic functions", **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.
- [45] Horowitz D. (1978), "A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.
- [46] Jahangiri J. M. (1998), "Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect. A** 52 (2), 57-66.
- [47] Jahangiri J. M. (1999), "Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk", **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.
- [48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), "Salagean-type harmonic univalent functions", **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).
- [49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), "Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex", **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.
- [50] Kulshrestha P. K. (1973), "Generalized Convexity in Conformal Mappings", **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.
- [51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), "Convolution Properties of Convex Harmonic Functions", **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.
- [52] Kuroki K. and Owa S. (2011), "Notes on new class for certain analytic functions", **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.
- [53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), "Generating functions for some classes of univalent functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

- [54] Lewin M. (1967), "On a coefficient problem for bi-univalent functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.
- [55] Libera R. J. (1965), "Some classes of regular univalent functions", **Proceedings of the American Mathematical Society**.
- [56] Lowner K. (1923), "Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises", **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.
- [57] Ma W. and Minda D. (1992), "Uniformly convex functions", **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.
- [58] MacGregor T. H. (1962), "Functions whose derivative has a positive real part", **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.
- [59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), "On Products of Starlike Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.
- [60] Marx A. (1932), "Untersuchungen uber schlichte Abbildungen", **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.
- [61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), "Subclasses of uniformly starlike functions", **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.
- [62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), "Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality", **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.
- [63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), "A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators", **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.
- [64] Mocanu P. T. (1980), "Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc", **Mathematica (Cluj)**, 22 (45), pp. 77-83.
- [65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), "Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination", **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.
- [66] Murugusundaramoorthy G. (2003), "A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments", **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

- [67] Netanyahu E. (1969), "The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in  $|z| < 1$ ", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.
- [68] Nezhmetdinov I. R. (1997), "Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets", **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.
- [69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), "On Starlike Harmonic Functions", **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.
- [70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), "On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension", **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.
- [71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), "Strongly gamma-starlike functions of order alpha", **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.
- [72] Ozawa M. (1969), "An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient", **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.
- [73] Pederson R. N. (1968), "A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.
- [74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), "A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.
- [75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), "Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle", **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.
- [76] Pommerenke C. (1963), "On starlike and close-to-convex functions", **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.
- [77] Pommerenke C. (1975), "**Univalent Functions**", Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), "Univalent harmonic mappings convex in one direction", **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).
- [79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), "Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings", **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.
- [80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), "Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms", **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

- [81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), "Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.
- [82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), "Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.
- [83] Porwal S. and Darus M. (2013), "On a new subclass of bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.
- [84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), "Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order", **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.
- [85] Robertson M. S. (1936), "On the theory of univalent functions", **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.
- [86] Rønning F. (1994), "On uniform starlikeness and related properties of univalent functions", **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.
- [87] Rønning F. (1993), "A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions", **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.
- [88] Rønning F. (1993), "Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.
- [89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), "Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions", **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.
- [90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), "Goodman-type harmonic convex functions", **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.
- [91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), "On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture", **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.
- [92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), "Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture", **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.
- [93] Sakaguchi K. (1959), "On a certain univalent mapping", **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.
- [94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), "Universally Prestarlike Functions of Complex Order", **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

- [95] Sheil-Small T. (1990), "Constants for Planar Harmonic Mappings", **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.
- [96] Silverman H. (1998), "Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients", **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.
- [97] Silverman H. (1975), "Univalent functions with Negative Coefficients", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.
- [98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), "On Certain Classes of Convex Functions", **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.
- [99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), "Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian", **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska, LXV** (2), 191-20.
- [100] Spacek L. (1933), "Prispěvek k teorii funkei prostych", **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.
- [101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), "Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.
- [102] Srivastava H. M., Bulut S., Çağlar M. and Yağmur N. (2013), "Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions", **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.
- [103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), "Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions", **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.
- [104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), "Coefficient estimates for some subclasses of  $m$ -fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.
- [105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Initial coefficient estimates for some subclasses of  $m$ -fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.
- [106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions", **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.
- [107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), "Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions", **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

- 
- 
- [108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), "Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.
- [109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), "Initial coefficient bounds for a subclass of  $m$ -fold symmetric bi-univalent functions", **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.
- [110] Stankiewicz J. (1966), "Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions  $\alpha$ -angulairement étoilées", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.
- [111] Starkov V. V. (2004), "Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings", New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.
- [112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), "Notes on Convex Functions of Order alpha", **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.
- [113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), "The Fekete-Szegő functional problems for some subclasses of  $m$ -fold symmetric bi-univalent functions", **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.
- [114] Temme N. M. (1996), "Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics", New York: Wiley.
- [115] Umezawa T. (1955), "On the theory of univalent functions", **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228.
- [116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), "A Remark on Convex and Starlike Functions", **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.
- [117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), "Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.
- [118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), "A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems", **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.
- [119] Yalçın S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), "On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions", **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.
- [120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), "Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions", **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.





# نمایه

- $\alpha$  - مارپیچ گون، ۱۷
- اووا، ۱۴، ۳۱
- اژی لارسی، ۵۲
- اکستریمال، ۳
- بازیلویچ، ۱۶
- براون، ۲۰
- برناردی، ۶۸
- برنان، ۸، ۷۶-۷۸
- بریگمن، ۱۱
- بسط سری تیلور، ۲۲، ۲۹، ۸۰
- بولوت، ۷۹
- بیبرباخ، ۳، ۴
- تابع فوق هندسی گاوس، ۶۱، ۹۹
- تابع معکوس، ۷۵
- تابع نزدیک به محدب، ۱۷، ۲۸
- تابع همساز حقیقی، ۳۳
- تابع کوبه، ۱۷، ۴۱
- تابع گامای اویلر، ۷
- تابع همساز مختلط، ۳۵
- تابعیت، ۸۱
- توابع  $\gamma$  - قویا ستاره گون از مرتبه  $\alpha$ ، ۱۳
- توابع تحلیلی، ۲
- توابع داخلی منفرد، ۴۱
- توابع ستاره گون سهموی، ۲۴، ۵۰
- توابع مطیع، ۴
- توابع همساز نوع گودمن - رونینگ، ۵۰
- تک ارز، ۲، ۳، ۳۵
- ثابت کوبه، ۲۲
- آئوف، ۷۸، ۸۲، ۸۶، ۸۷
- آسگود، ۴۵، ۵۸، ۶۶
- آهوچا، ۴۲، ۴۶-۴۹
- استارکف، ۷۰
- استانکویچ، ۸
- استروهکر، ۱۰
- استفان، ۴۹
- استیر، ۱۱
- اسریواستاوا، ۳۱، ۷۶-۷۹، ۸۲، ۸۶، ۸۷
- اسپاسک، ۱۷
- اسکات، ۷
- اصل تابعیت، ۲۵
- اصل مقدار ماکزیمم، ۳۴، ۶۳، ۷۰
- اصل مقدار مینیمم، ۳۴
- الامیری، ۵۶
- الشقصی، ۴۹، ۵۰
- العشوه، ۸۰-۸۲، ۸۶، ۸۷
- الکساندر، ۸، ۱۰، ۲۴، ۲۵، ۶۸
- انبساط، ۳، ۳۷
- انبساط مختلط دوم، ۳۶
- انتقال، ۲۱، ۵۸، ۶۵
- انتقال برد، ۳، ۳۷
- اوزاوا، ۴
- اوزترک، ۴۹
- اومی زاوا، ۱۲

- جریان سیالات، ۳۴  
جهانگیری، ۴۳، ۴۵، ۴۹، ۵۰، ۵۲  
جهت برگردان، ۳۶  
جهت نگهدار، ۳۶  
حدس بیبرباخ همساز، ۳۷  
حدس بیبرباخ، ۴، ۵  
حدس روبرتسون، ۴، ۵  
حدس روگوسینسکی، ۴، ۵  
حدس میلین، ۴، ۵  
خاصیت پایای آفین، ۷۱، ۷۲  
خودریختی قرص، ۳، ۲۱، ۳۷، ۷۱  
داروس، ۴۹، ۵۰  
دو-بازیلویچ، ۷۹  
دو-تک ارز، ۷۵-۷۷، ۸۰  
دو-ستاره گون از مرتبه  $\alpha$ ، ۷۷، ۷۹  
دوبرانژ، ۴  
دورف، ۴۹  
دورن، ۴۵، ۵۸، ۶۶  
رادو، ۴۴  
راوی چاندران، ۳۰  
رایت، ۱۱  
رده، ۳، ۳۶  
روبرتسون، ۶، ۷، ۹  
روش ساختار برشی، ۳۷  
روشه ویه، ۱۱، ۲۸، ۴۷، ۵۰  
رونینگ، ۲۱، ۲۳-۲۵، ۶۴  
سالانگان، ۳۰، ۵۰  
سالیناس، ۴۷  
ساکاگوچی، ۱۹، ۲۰  
سایرام کالیراج، ۵۶، ۷۰  
ستاره گون، ۵  
ستاره گون ما-میندا، ۲۵  
ستاره گون یکنواخت، ۲۰، ۵۵-۵۸، ۶۲  
سلماسی، ۲۱  
سوبرامانیان، ۴۹  
سوتکویچ، ۱۲  
سوداراسان، ۵۲  
سوکول، ۱۳  
سوگاو، ۹، ۱۱  
سیلورمن، ۹، ۴۲، ۴۳، ۴۹-۵۱  
سیم، ۱۰، ۱۳، ۷۹  
شعاع تحذب، ۸، ۱۹  
شعاع ستاره گونی، ۸  
شوئنبرگ، ۲۸  
شیفر، ۴  
شیل-سمال، ۲۸، ۳۶، ۳۷، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۷، ۷۲  
ضرب هادامار، ۲۷  
طاها، ۷۷، ۷۸  
عبادیان، ۷۸  
عزیز، ۷۸  
علی، ۴۹  
عملگر روشه ویه، ۵۱  
عملگر نوع سالانگان، ۵۱  
عملگر میانگین، ۲۵، ۲۶  
فابر، ۷۶، ۷۹  
فراسین، ۷۸، ۸۲، ۸۶، ۸۷  
فرایندهای احتمالاتی، ۳۴  
فرمول انتگرال پواسن، ۳۴، ۳۶  
قارابادیان، ۴  
قرص یکه باز، ۲  
قضیه نگاشت ریمان، ۲  
قویا دو-ستاره گون از مرتبه  $\beta$ ، ۷۷  
قویا ستاره گون، ۸  
قویا محدب از مرتبه  $\beta$ ، ۱۱  
لاونر، ۴  
لواندوفسکی، ۱۲

- لوی، ۳۶  
 لوین، ۷۶  
 ما، ۲۴، ۲۵  
 مارپیچ گون، ۱۷  
 مارپیچ گونی، ۱۷  
 مارکز، ۷  
 مارکس، ۱۰  
 مجموعه دوگان، ۲۸، ۲۹، ۶۳، ۷۰  
 محدب، ۸  
 محدب از مرتبه  $\alpha$ ، ۹  
 محدب در جهت  $\alpha$ ، ۱۲  
 محدب در جهت افقی، ۱۲  
 محدب در یک جهت، ۱۲  
 محدب ما-میندا، ۲۵  
 محدب مانا، ۶۱  
 محدب یکنواخت، ۵۵  
 محدب یکنواخت، ۲۳، ۵۰، ۶۴-۶۷  
 مرتبه پایای خطی، ۷۱  
 مرکز، ۲۱  
 مزدوج سازی، ۳، ۳۷  
 مزدوج همساز، ۳۵  
 مسئله ی باز، ۲۱، ۲۳، ۲۸، ۳۷، ۴۱، ۷۶  
 مطلقاً محدب، ۷۰  
 مطیع، ۵  
 معادلات کوشی ریمان، ۲  
 معادله لاپلاس، ۳۳  
 موروگورومورثی، ۴۹، ۵۰  
 موکانو، ۲۵، ۴۲، ۴۳، ۴۵، ۵۶  
 مک گرگور، ۱۰  
 میلر، ۱۲، ۲۵  
 میندا، ۲۴، ۲۵  
 نانوکاوا، ۱۲، ۱۳  
 نتانیا هو، ۷۶  
 نجف زاده، ۷۸  
 نزدیک به محدب، ۱۵، ۱۶، ۴۵  
 نزدیک به محدب از مرتبه  $\alpha$ ، ۱۶  
 نسبت به نقاط متقارن ستاره گون، ۱۹، ۲۰  
 نسبت به نقاط متقارن ستاره گون از مرتبه  $\alpha$ ، ۲۰  
 نمایش کانونی، ۳۵  
 نوشیرو، ۱۵  
 نژمدیتنف، ۲۱، ۲۳، ۲۴، ۲۸، ۲۹  
 نگاشت ریمان، ۲  
 نگاشت های همساز حقیقی، ۳۵  
 نگاشتهای آفین، ۵۷، ۶۶  
 نگاشتهای همساز سطح، ۳۵  
 هالنبک، ۱۱  
 هرگلوت، ۱۴  
 هم تحلیلی، ۳۵، ۶۱  
 همبند ساده، ۲  
 همدیس، ۲  
 هوروویتس، ۴، ۲۱  
 هیدرودینامیک، ۳۴  
 وانگ، ۱۱  
 ورشاوسکی، ۱۵  
 وی جی، ۴۹، ۵۰  
 ویلکن، ۱۱  
 پاراجاپات، ۵۶  
 پایای خطی، ۳، ۲۱، ۲۴، ۷۱-۷۳  
 پتانسیل الکترواستاتیک، ۳۴  
 پتانسیل سرعت، ۳۴  
 پترسون، ۴  
 پریمما، ۷۹  
 پوش محدب، ۲۵  
 پولیا، ۲۸  
 پومرنکه، ۱۲  
 پوناسمی، ۵۶، ۷۰  
 پوچهامر، ۹۹

- پیش ستاره گون، ۳۰، ۳۱  
 پیچش، ۲۲، ۲۳، ۲۷، ۴۶، ۵۶، ۶۳، ۸۰  
 چرخش، ۳، ۲۱، ۳۷، ۵۸، ۶۵  
 چوکه، ۴۴، ۴۵، ۵۸، ۶۶  
 ژاکوبین، ۳۵، ۷۱، ۷۲  
 ژو، ۷۹  
 کاراتئودوری، ۱۵، ۸۴-۸۶  
 کاملاً محدب، ۴۴، ۴۵، ۶۴، ۶۶  
 کاملاً ستاره گون، ۴۲، ۵۵، ۵۶، ۵۸  
 کاملاً محدب، ۵۵  
 کاپلان، ۱۵، ۱۶  
 کرسی، ۷۹  
 کلونی، ۳۶، ۳۷، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۷، ۷۶  
 کنزه، ۴۴  
 کوان، ۱۰، ۱۳، ۷۹  
 کوبه، ۳، ۵، ۲۷، ۷۵  
 کوروکی، ۱۴  
 کولشرسترا، ۱۸  
 کومار، ۴۸  
 گرانسکی، ۷۶  
 گودمن، ۲۰-۲۳، ۲۵، ۵۷، ۶۴، ۶۶  
 یالسنین، ۴۹  
 یامانکارادنیز، ۴۹